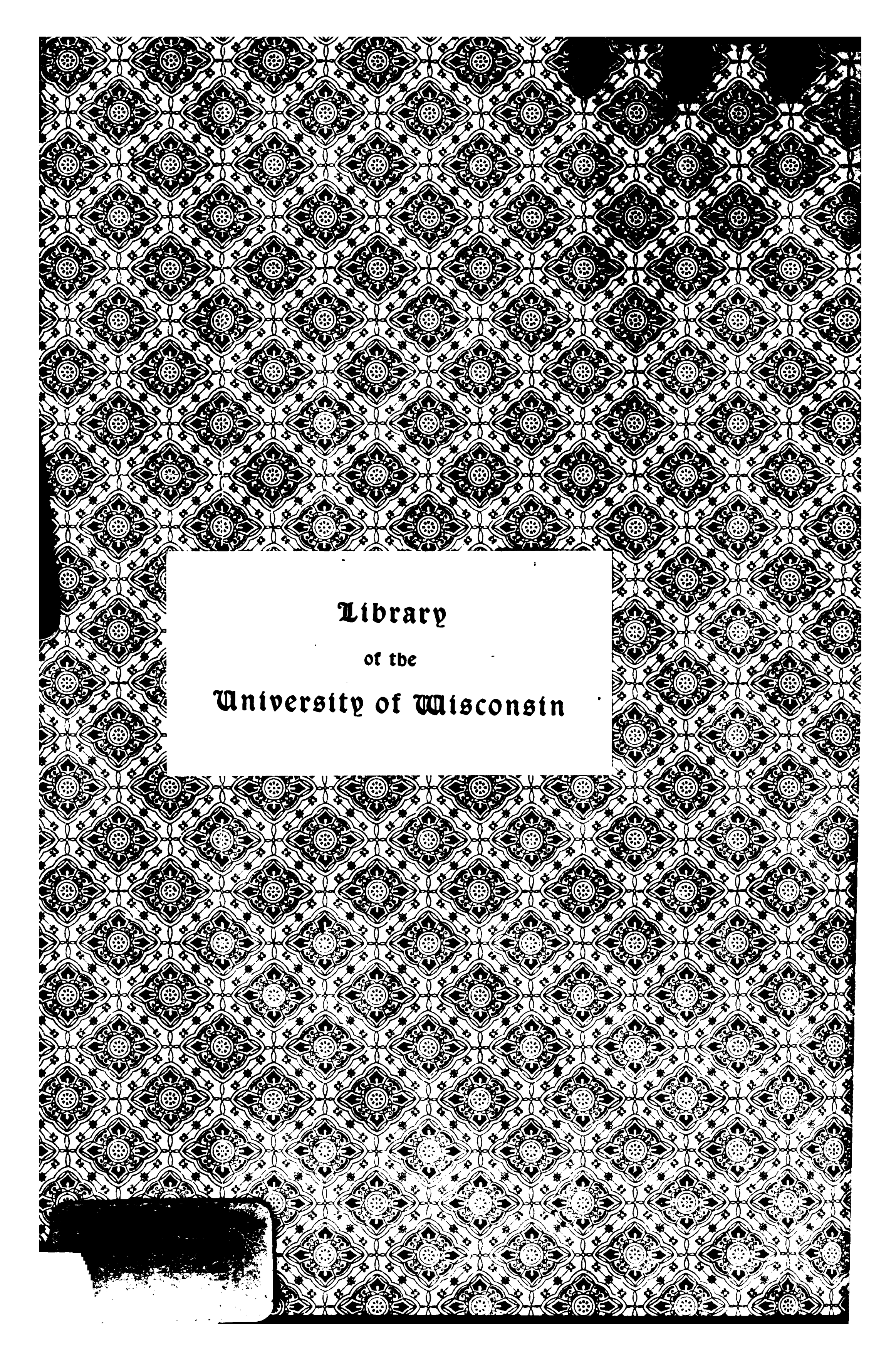
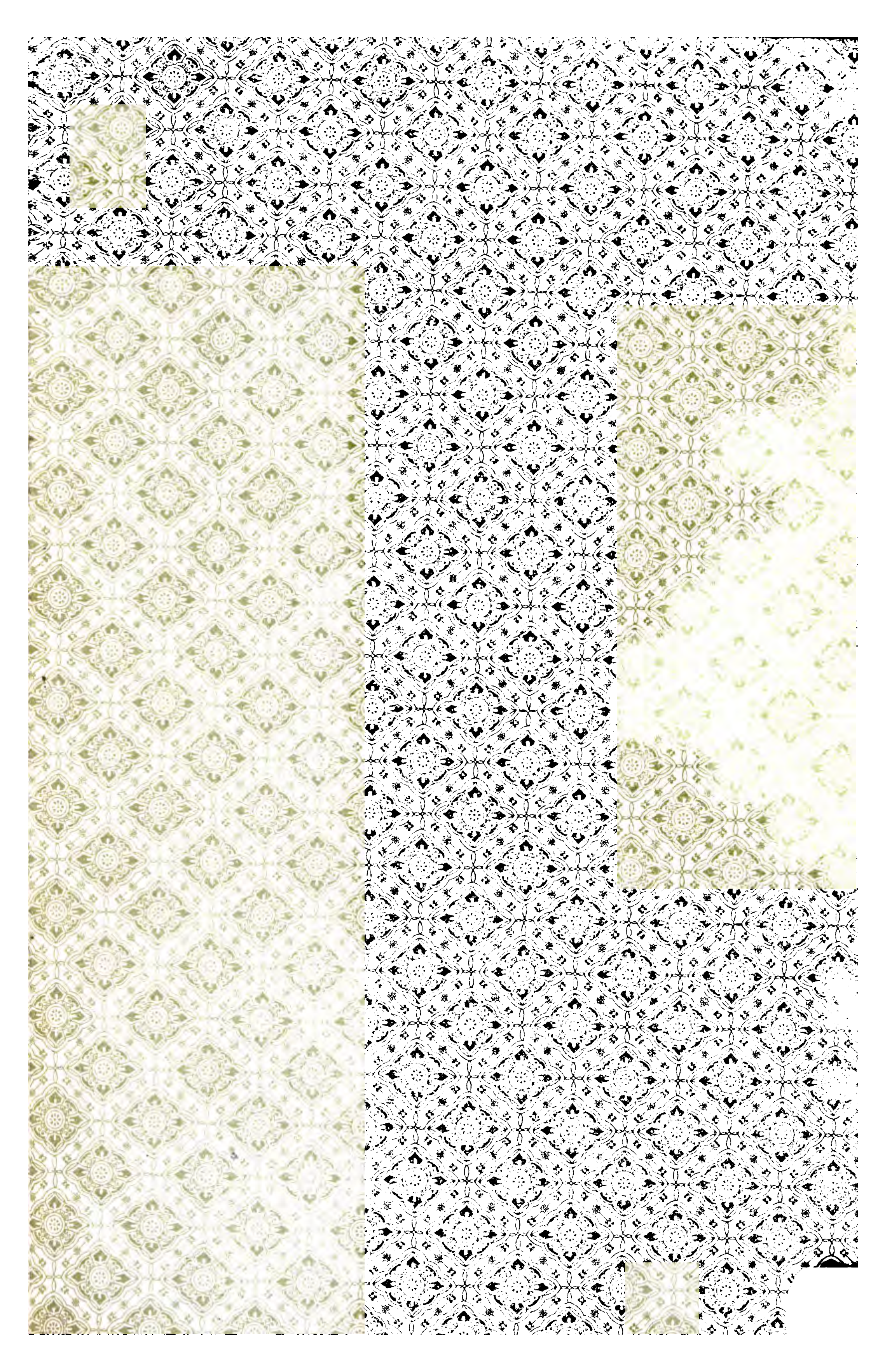
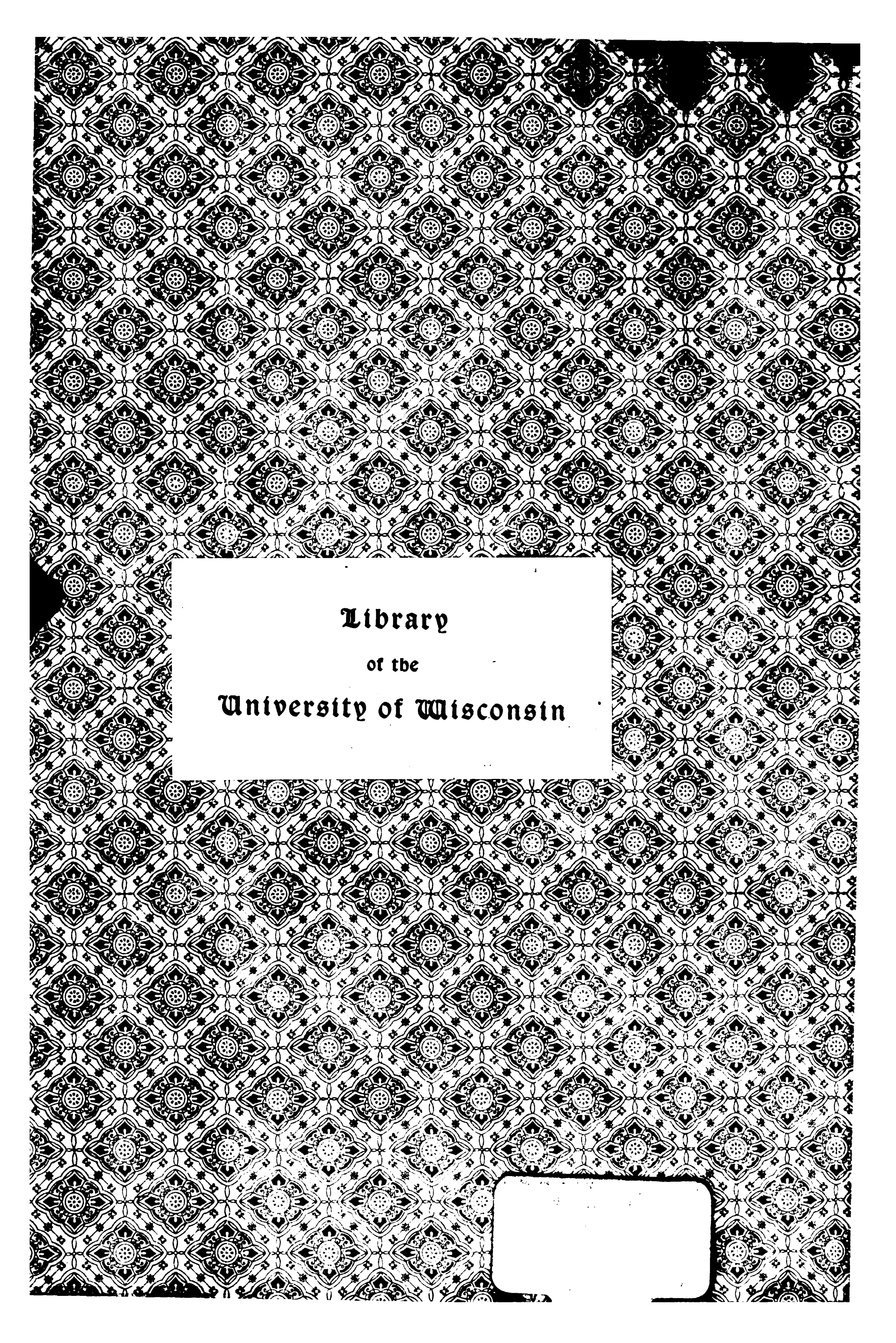
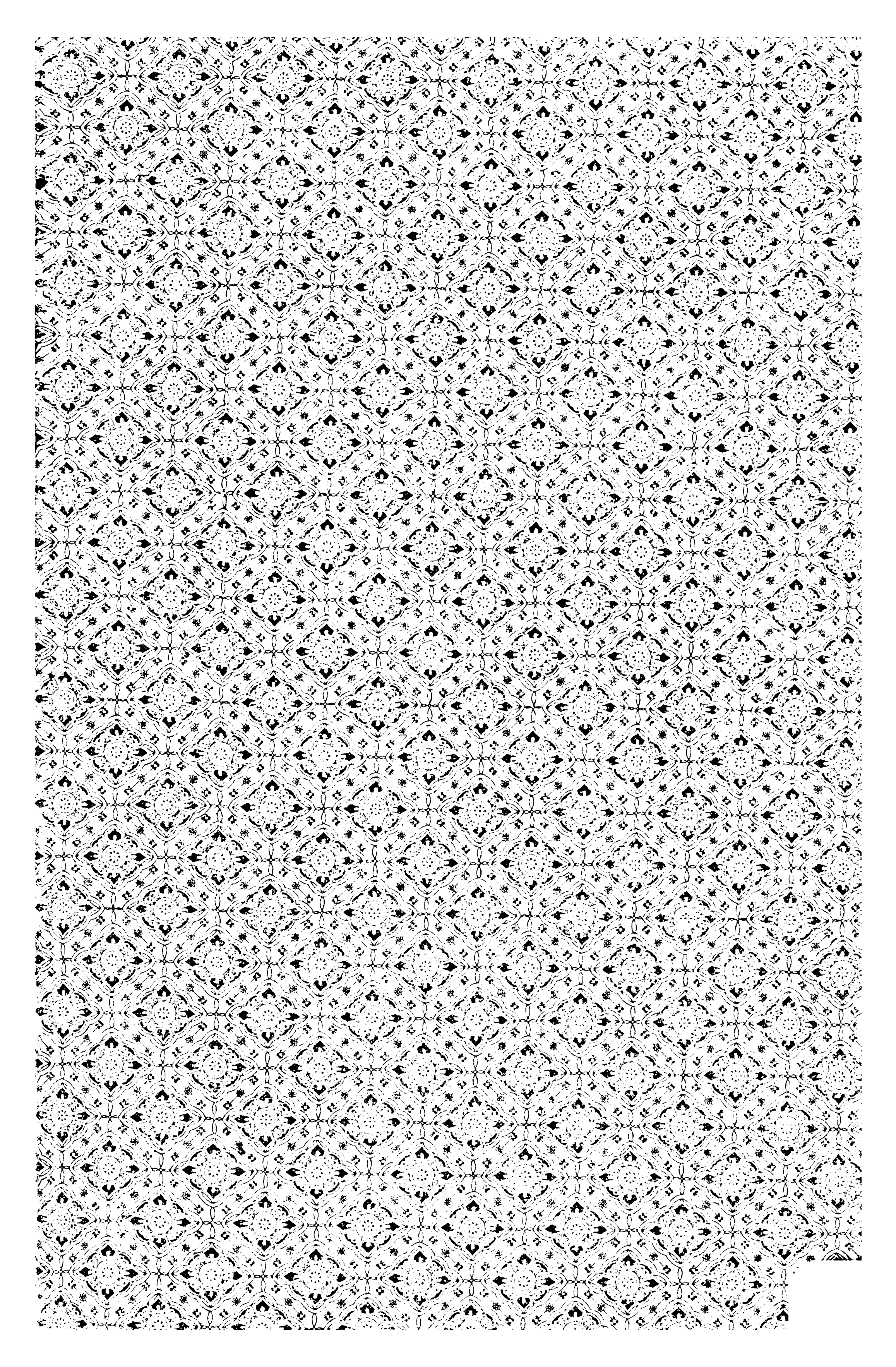

Library
of the
University of Wisconsin




Library
of the
University of Wisconsin



Vorträge

über

Mechanik

als Grundlage für das

Bau- und Maschinenwesen.

Von

Wilh. Keck,

weil. Geh. Regierungsrat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Erster Teil:

Mechanik starrer Körper.

Dritte Auflage,

bearbeitet von

Ludwig Hotopp,

Baurat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Mit 418 Holzschnitten



Hannover.
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.
1905.

Druck von Th. Schäfer, Hannover.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen dasjenige, was als die erste Hälfte des Lehrfaches „Mechanik" im Winter des ersten Studienjahres an der Technischen Hochschule zu Hannover vorgetragen wird. Der Studienplan der Hochschule ist so eingerichtet, dafs die Vorträge über Mechanik erst beginnen, nachdem die Studierenden etwa $2^1/_2$ Monate lang Differential- und Integralrechnung gehört haben. Auf Grund dieser Anordnung kann in den Vorträgen über Mechanik von den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung Anwendung gemacht werden. Dieser Vorgang kommt nicht nur der Mechanik, sondern auch dem mathematischen Unterrichte zu statten, weil dessen Ergebnisse durch die Anwendungen, die sie in der Mechanik finden, geübt und befestigt werden.

Besonderes Gewicht wurde auf Einfachheit und Anschaulichkeit gelegt, sowie auf allmählichen Übergang vom Leichten zum Verwickelteren. Allen wichtigen Sätzen sind erläuternde Beispiele aus dem praktischen Leben und aus der Technik in kleinerem Drucke beigefügt.

Der vorliegende erste Teil der Vorträge über Mechanik behandelt die Mechanik des Punktes und der starren Körper. Die Mechanik der elastischen und der flüssigen Körper soll einen zweiten Teil, die allgemeine (analytische) Mechanik einen dritten Teil bilden, während eine eingehendere Elastizitätslehre vom Verfasser bereits 1892/93 herausgegeben wurde.

Bei der Abfassung des Buches ist auf Angabe der Quellen, auch der geschichtlichen, gröfstenteils verzichtet worden; doch sei hervorgehoben, dafs mir das Lehrbuch der technischen Mechanik von A. Ritter in Aachen, meinem hochverehrten Lehrer, in vielen Beziehungen ein Vorbild gewesen ist. Diejenigen Stellen, an denen ich Ritters Werk unmittelbar benutzte, sind im Buche angegeben.

Auch dem Lehrbuche der technischen Mechanik von Oscar Hoppe in Clausthal verdanke ich wertvolle Anregung.

Den Schlufs des Buches bildet ein alphabetisches Verzeichnis der in den Formeln benutzten Buchstaben, sowie ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

Hannover, im Januar 1896.

Keck.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Mit Rücksicht auf die freundliche Aufnahme, welche diesem Buche bei seinem ersten Erscheinen zuteil geworden ist, habe ich bei der Bearbeitung der zweiten Auflage den Hauptplan der ersten Ausgabe beibehalten.

Die Einfachheit und Anschaulichkeit der Behandlung des Stoffes habe ich zu verbessern gesucht durch Hinzufügung einiger neuen Holzschnitte, durch Verbesserung solcher Figuren, die nicht nach Wunsch ausgefallen waren, sowie durch zahlreiche kleine Änderungen und Ergänzungen im Texte. Auch die Zahl der erläuternden Beispiele wurde vermehrt durch die Vorführung der Steinzange und des Bremsberges.

Den in dankenswerter Weise mir erteilten Winken und Ratschlägen zur Verbesserung des Buches habe ich nach Möglichkeit Rechnung getragen.

Hannover, im Januar 1900.

Keck.

Vorwort zur dritten Auflage.

Nachdem mit Ablauf weniger Jahre wiederum eine Neuauflage dieses Buches erforderlich geworden, habe ich auf Ersuchen der Verlagsbuchhandlung und im Einvernehmen mit den Erben des leider zu früh verstorbenen Verfassers die Durchsicht und Bearbeitung derselben übernommen. In Rücksicht auf den regen Zuspruch, welchen das Buch in seinem jetzigem Bestande seit seinem ersten Erscheinen im Jahre 1896 gefunden hat, und insbesondere gegenüber den darin niedergelegten, einer langjährigen erfolgreichen Lehrtätigkeit entsprungenen Erfahrungen des Verfassers im Bereiche des behandelten Lehrgebietes habe ich, selbst erst seit einigen Jahren der Lehrtätigkeit obliegend, mir die weitgehendste Zurückhaltung bei vorliegender Bearbeitung auferlegen zu sollen geglaubt. Aus demselben Grunde ist auch davon abgesehen, den veränderten Lehrplänen, welche sich aus der Einführung gesonderter Vorlesungen über Mechanik bezw. Statik für Architekten, Bauingenieure und Maschineningenieure an der Technischen Hochschule zu Hannover im Oktober 1901 ergeben haben, im einzelnen Rechnung zu tragen.

In den Kapiteln über Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene, Ermittelung der Momente von Kräften etc. sind, entsprechend der Stoffanordnung in den Vorträgen, die graphischen Methoden etwas eingehender als in den vorhergehenden Auflagen und in unmittelbarer Nebeneinanderstellung mit der analytischen Behandlung des Gegenstandes berücksichtigt. Auch sind im Anschlufs daran einige weitere wichtige graphostatische Sätze und Regeln hinzugefügt. — Die theoretische Behandlung der Schraube hat eine geringe Ergänzung erfahren und ist als Beispiel für die Anwendung nicht sperrenden Gewindes die sogenannte „Stützspindel“ aufgenommen. —

Im übrigen haben wesentliche Änderungen nicht stattgefunden, so dafs das Buch auch in seiner neuen Auflage in der Hauptsache noch als Werk seines Urhebers gelten mufs.

Hannover, im Herbst 1904.

L. Hotopp.

Inhalt.

Zweite Abteilung.

Mechanik starrer Körper.

A. Gleichgewicht starrer Körper.

B. Beschleunigte Bewegung starrer Körper.

Allgemeines.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Körper und von den Ursachen der Bewegung, den Kräften.

Während ein Körper sich bewegt, führt jeder Punkt desselben seine besondere Bewegung aus, und es wird die Bewegung des ganzen Körpers erst dann völlig bekannt sein, wenn man sie für jeden einzelnen seiner Punkte angeben kann.

Ein Punkt beschreibt bei seiner Bewegung eine ununterbrochene Bahnlinie, während zugleich eine gewisse Zeit verfliefst. Zur Kenntnis der Bewegung eines Punktes ist daher erforderlich, dafs man die Form der Bahnlinie kennt und aufserdem anzugeben vermag, an welcher Stelle seiner Bahn der bewegliche Punkt sich in jedem Augenblicke befindet.

Soll die Bewegung eines Körpers aus ihren Ursachen hergeleitet werden, so mufs man aufser der geometrischen Form und Gröfse der Körper auch noch gewisse physikalische Eigenschaften derselben, zunächst ihre Stoffmenge, ihren Gehalt an träger Materie, berücksichtigen, weil diese von wesentlichem Einflufs auf die Bewegung ist. Die Menge der trägen Materie wird kurz die Masse des Körpers genannt.

Je kleiner die räumliche Ausdehnung eines Körpers ist im Verhältnisse zur Längenerstreckung der Bahnlinien seiner einzelnen Punkte, desto näher werden diese einzelnen Bahnlinien aneinander rücken, desto weniger werden sie sich also räumlich voneinander unterscheiden. Betrachtet man z. B. die Bewegung einer geworfenen Kugel aus einiger Entfernung, so wird man in vielen Fällen nicht mehr die verschiedenen Bahnlinien der einzelnen Punkte getrennt auffassen, sondern man wird diese sämtlichen Bahnlinien als zu einer einzigen (etwa der des Mittelpunktes) zusammengeschrumpft ansehen und nur von einer Bahnlinie der geworfenen Kugel sprechen. Dabei wird also die räumliche Ausdehnung der Kugel völlig vernachlässigt, sie wird hinsichtlich der geometrischen Untersuchung als zu einem Punkte verdichtet angesehen; jedoch denkt man sich diesen Punkt als behaftet mit der Masse des entsprechenden Körpers und bezeichnet ihn als einen Massenpunkt (materiellen Punkt).

Wenn man z. B. sagt, die Erde bewege sich in einer Ellipse um die Sonne, so faſst man damit unseren ganzen Planeten als einen einzigen Massenpunkt auf, indem man sich die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte vereinigt denkt. Wir wissen freilich, daſs, wegen der gleichzeitigen Drehung der Erde um ihre Achse, die einzelnen Punkte der Erde durchaus nicht sämtlich Ellipsen, sondern verschiedene cykloidenartige Kurven beschreiben, aber dennoch ist die Auffassung der Erde als einfacher Massenpunkt bei solchen Untersuchungen zulässig, bei denen es auf die Verschiedenartigkeit der Bewegungen der einzelnen Punkte nicht ankommt, während dagegen bei anderen Untersuchungen gerade die verschiedene Lage der einzelnen Punkte der Erde von Wichtigkeit sein kann, so daſs dann natürlich die räumliche Ausdehnung der Erde nicht vernachlässigt werden darf.

In Fällen dieser Art, wo die Form und Gröſse eines Körpers nicht unberücksichtigt bleiben darf, betrachtet man ihn als aus Massenpunkten zusammengesetzt und bezeichnet ihn als eine Gruppe von Massenpunkten.

Ob man also in einem gegebenen Falle den sich bewegenden Körper als einfachen Massenpunkt, oder aber als eine Massengruppe zu behandeln hat, hängt nicht so sehr von der Gröſse des Körpers, sondern vielmehr von der Art der vorliegenden Aufgabe ab. Übrigens wird später gezeigt werden, daſs die Ergebnisse der Untersuchungen, bei denen ein sich bewegender Körper als zu einem Punkte verdichtet angesehen wurde, nicht etwa ungenau, oder nur annähernd richtig sind, sondern für einen bestimmten Punkt des Körpers (den Schwerpunkt) vollständige Gültigkeit haben.

Es kann daher eine Untersuchung, bei welcher ein Körper als Massenpunkt angesehen wurde, jederzeit weiter ausgeführt und eingehender behandelt werden, indem man dazu übergeht, den betreffenden Körper nunmehr als eine Massengruppe aufzufassen. Es ist dann nur eine Vervollständigung, nicht aber eine Verbesserung oder Berichtigung der ersten einfacheren Untersuchung nötig.

Wir werden uns nun zunächst mit der Bewegung eines einfachen Massenpunktes beschäftigen und erst später zu der Behandlung von Massengruppen übergehen.

Erste Abteilung.

Mechanik des Massenpunktes.

Die Bewegung eines Massenpunktes heifst geradlinig oder krummlinig, je nachdem die Bahnlinie eine Gerade oder eine Kurve ist. Unter der „Richtung der Bewegung“ versteht man die Richtung der Bahnlinie an derjenigen Stelle, wo der Massenpunkt sich augenblicklich befindet. Bei der geradlinigen Bewegung ist also die Bewegungsrichtung dauernd dieselbe; bei der krummlinigen Bewegung ändert sie sich fortwährend.

1. Darstellung des Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Geraden, so kann der Ort P desselben in irgend einem Augenblicke durch seinen Abstand s von einem festen Punkte A der Bahnlinie AM (Fig. 1) angegeben werden. Die während der Bewegung verfliefsende Zeit wird von irgend einem Zeitpunkt an nach Zeiteinheiten (etwa Sekunden) gezählt und mit t (von *tempus*) bezeichnet, während s (von *spatium*) in Längeneinheiten (etwa Metern) ausgedrückt wird. Ist nun zwischen den beiden veränderlichen Gröfsen s und t eine Beziehung bekannt, etwa

Fig. 1.

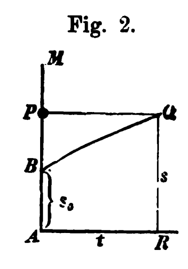
$$s = f(t),$$

so kann man für jeden Wert von t, d. h. für jeden Zeitpunkt, die zugehörige Gröfse s und damit die Lage des Massenpunktes auf seiner Bahnlinie berechnen. Es wird daher die Gleichung $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz der geradlinigen Bewegung des Massenpunktes genannt.

Ein solches Bewegungsgesetz wird am besten anschaulich gemacht durch eine bildliche Darstellung, indem man die Zeitgröfsen t nach einem beliebig gewählten Mafsstab als Abszissen, die Längen s ebenso als Ordinaten aufträgt. Die Bahnlinie AM kann dann unmittelbar als Ordinatenachse benutzt werden. Die so erhaltene

Linie BQ (Fig. 2) nennen wir die **Wegeslängen-Kurve** (die man aber ja nicht als Bahnlinie auffassen darf). Aus Fig. 2 erkennt man, dafs der Massenpunkt zu Anfang der Betrachtung, d. h. für $t = 0$, schon in einem Abstand $AB = s_0$ von dem Festpunkt A sich befand, und dafs dieser Abstand s sich mit wachsender Zeit vergröfsert, dafs der Massenpunkt sich also in der Richtung von A nach M bewegen wird. Nach $t = AR$ Zeiteinheiten ist $s = QR$; zieht man nun durch Q eine Parallele zur Zeitachse, so bestimmt diese den augenblicklichen Ort P auf der Bahnlinie AM.

Fig. 2.



Beispiel: Das Bewegungsgesetz $s = 1 + {}^1/_4\, t^2$ liefert für angenommene Werte 0, 1, 2, . . . folgende zugehörige Werte von s:

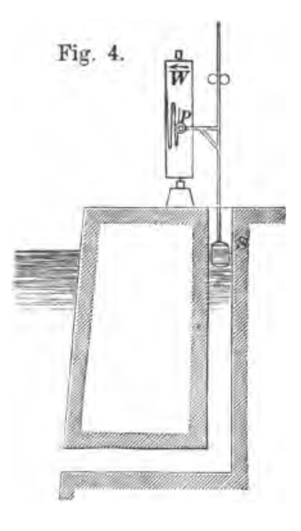
$t = 0$	1	2	3	4
$s = 1$	$1^1/_4$	2	$3^1/_4$	5.

Das Bewegungsgesetz läfst sich auch schreiben $t^2 = 2 \cdot 2\,(s - 1)$; dies ist die Gleichung einer Parabel mit lotrechter Achse und dem Scheitel B (Fig. 3).

Fig. 3.

In manchen Fällen, wo das Gesetz einer Bewegung nicht bekannt ist, verschafft man sich dadurch eine möglichst genaue Kenntnis desselben, dafs man den als Massenpunkt zu betrachtenden beweglichen Körper mit einem Schreibstifte versieht, der auf einer durch ein Uhrwerk gleichmäfsig gedrehten Papierwalze W die bildliche Darstellung des Bewegungsgesetzes selbsttätig aufzeichnet. So kann z. B. ein veränderlicher Wasserstand durch Schwimmer sich selbsttätig auftragen, indem ein mit dem Schwimmer S verbundener Schreibstift P die entsprechende Kurve (Flutkurve) beschreibt (Fig. 4). Gewöhnlich ist der Wechsel der Wasserstandshöhe zur unmittelbaren Auftragung zu grofs; alsdann ist die lotrechte Bewegung durch geeignetes Räderwerk in verkleinertem Mafsstab (etwa 1 : 25) zur Darstellung zu bringen.

Fig. 4.



a) Gleichförmige Bewegung eines Punktes. Geschwindigkeit.

Der einfachste Fall eines Bewegungsgesetzes ist offenbar die geradlinige (lineare) Form

1) $$s = s_0 + ct$$

(mit s_0 und c als unveränderlichen Gröfsen), welche durch die Gerade BQ (Fig. 5) dargestellt wird. Für $t = AR$ ist $s = RQ = AP$. Gibt man t einen anderen, etwa gröfseren Wert $t_1 = AR_1$, so wird

$$s_1 = s_0 + ct_1 = R_1Q_1 = AP_1.$$

Fig. 5.

Durch Abziehen der ersten Gleichung von der letzten entsteht

$$s_1 - s = c(t_1 - t) \text{ oder } c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{entsprechende Zeit}}.$$

Die unveränderliche Gröfse c der Gl. 1 ist also das Verhältnis der zurückgelegten Wegeslänge zu der Anzahl der dazu verbrauchten Zeiteinheiten. **Eine Bewegung, bei der dieses Verhältnis des Weges zur Zeit sich nicht ändert, bei der also in gleichen Zeiträumen stets gleiche Wegeslängen zurückgelegt werden, heifst eine gleichförmige.**

Wählt man den beliebigen Zeitraum $t_1 - t$ gleich der Zeiteinheit, so bedeutet $c = s_1 - s$ die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge, und **dieses Verhältnis: Weg durch Zeit, oder die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge heifst die Geschwindigkeit** c (von *celeritas*) **der gleichförmigen Bewegung.**

In der Darstellung des Bewegungsgesetzes (Fig. 5) erscheint die Geschwindigkeit $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{Q_1 N}{Q N} = \operatorname{tg} \alpha$ als das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängen-Kurve BQ.

Fig. 6.

Ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden BQ **negativ** (Fig. 6), so erhalten wir das Gesetz $s = s_0 - ct$ mit negativer Geschwindigkeit c; es bedeutet dies eine rückläufige Bewegung von B nach dem Festpunkt A hin.

Ist BQ der Zeitachse parallel, d. h. ist $\operatorname{tg} \alpha$ und damit die Geschwindigkeit $c = 0$, so bleibt s unverändert $= s_0$; der Massenpunkt ruht also.

b) Ungleichförmige Bewegung eines Punktes.

Hat das Bewegungsgesetz $s = f(t)$ nicht die einfach lineare Form, ist die Wegeslängen-Kurve also eine krumme Linie (Fig. 7), so ist das Verhältnis von $s_1 - s$ zu $t_1 - t$ veränderlich; man nennt dann die Bewegung eine ungleichförmige. Während des Zeitraumes $RR_1 = t_1 - t = \Delta t$ wird eine Wegeslänge $PP_1 = s_1 - s = \Delta s$ zurückgelegt. Stellt man sich nun vor, dafs diese Strecke Δs, statt nach dem gegebenen Bewegungsgesetze von dem Massenpunkte gleichförmig durchlaufen würde, so wäre

Fig. 7.

$$1)\qquad \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$$

die Geschwindigkeit dieser gedachten gleichförmigen Bewegung; die Sehne QQ_1 gäbe die Darstellung des Gesetzes derselben, und das Ansteigungs-Verhältnis dieser Sehne das Mafs der Geschwindigkeit v_m. Die Geschwindigkeit v_m (von *velocitas*) dieser gleichförmigen Bewegung, vermöge deren der sich bewegende Punkt in dem Zeitraume $t_1 - t$ dieselbe Wegeslänge $s_1 - s$ zurücklegen würde wie nach dem wirklichen Bewegungsgesetze, nennt man die mittlere Geschwindigkeit für den Zeitraum $t_1 - t$.

Die stellvertretende gleichförmige Bewegung, dargestellt durch die Sehne QQ_1, wird sich nun der gegebenen Bewegung, dargestellt durch die Kurve QQ_1, in der Nähe des Zeitpunktes t um so mehr anschmiegen, also von ihr um so weniger abweichen, je kleiner man den Zeitraum $t_1 - t = \Delta t$ und mithin auch die Sehne QQ_1 wählt. Läfst man den Zeitraum Δ t im Sinne der Differentialrechnung zu einem unendlich kleinen Zeitteilchen dt werden, so rückt auch der Kurvenpunkt Q_1 dem Punkte Q unendlich nahe, und aus der Sehne QQ_1 wird dann eine Berührungsgerade der Kurve im Punkte Q. Die für das unendlich kleine Zeitteilchen dt berechnete mittlere Geschwindigkeit

$$2)\qquad v = ds : dt$$

bezeichnet man als die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung im Zeitpunkte t. Sie erscheint als das Ansteigungs-Verhältnis der entsprechenden Berührungsgeraden der Wegeslängen-Kurve oder (was dasselbe ist) als das Ansteigungs-Verhältnis der Wegeslängen-Kurve selbst. Man bestimmt

die **Geschwindigkeit im Zeitpunkte t als die erste Abgeleitete oder den ersten Differential-Quotienten** $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ **des gegebenen Bewegungs-Gesetzes** $s = f(t)$.

Die Form $v = \frac{ds}{dt}$, in welcher bei ungleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, entspricht der Form $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ bei der gleichförmigen Bewegung; man betrachtet aber nur ein unendlich kleines Teilchen der Bewegung und denkt sich dieses durch eine gleichförmige mit derselben Wegeslänge ds ersetzt.

Beispiel: Dem Bewegungsgesetz $s = 1 + {}^1/_4 t^2$ (S. 4) entspricht hiernach eine von der Zeit t abhängige Geschwindigkeit, ein Geschwindigkeitsgesetz

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} t.$$

Für $t = 0$ ist $v = 0$; mit fortlaufender Zeit nimmt die Geschwindigkeit v gleichmäfsig zu. Man ersieht auch aus Fig. 3, dafs das Ansteigungs-Verhältnis der Kurve BQ bei B gleich Null ist und nach rechts fortwährend zunimmt.

Da die Geschwindigkeit die auf eine Zeiteinheit bezogene Wegeslänge bezeichnet, so müssen bei einer Geschwindigkeits-Zahl selbstverständlich auch die Längeneinheit und die Zeiteinheit bekannt sein, auf welche sich die Zahl bezieht. Rechnet man nach Metern und Sekunden, so schreibt man z. B. $v = 3\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$ wenn die sekundliche Geschwindigkeit 3 Meter beträgt, während $v = 10\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{std}}$ eine Geschwindigkeit von 10 Kilometern in einer Stunde bedeutet.

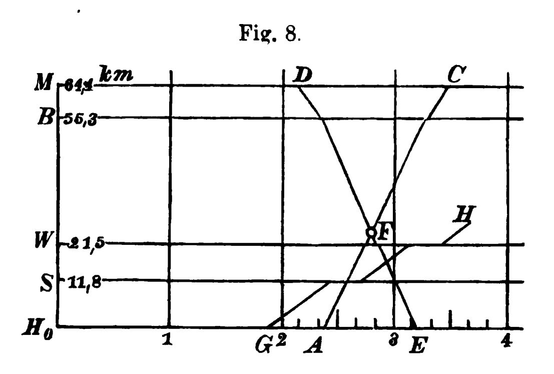
Kilometer, Meter, Centimeter und Millimeter werden durch km, m, cm und mm bezeichnet, während Stunde, Minute und Sekunde durch std, min und sek ausgedrückt werden sollen.

Zuweilen kennt man von einer Bewegung nur die in einzelnen gröfseren Zeiträumen zurückgelegten Wegeslängen, kann daraus dann die mittlere Geschwindigkeit für jeden dieser Zeiträume berechnen und betrachtet diese annäherungsweise als wahre Geschwindigkeiten, indem man jeden Bewegungsteil als einen gleichförmigen ansieht.

Beispiel 1: Letzteres findet Anwendung bei der zeichnerischen Darstellung der Fahrpläne der Eisenbahnzüge. Ein Eisenbahnzug ist freilich eine vielfältig zusammengesetzte Körpergruppe, deren einzelne Teile die verschiedenartigsten Bewegungen ausführen. Für den Zweck der Fahrpläne kommen aber diese verwickelten Verhältnisse nicht in Betracht. Vielmehr denkt man sich den

ganzen Zug zu einem Punkte zusammengedrängt, denkt sich die Mittellinie des Gleises geradlinig gestreckt und längs dieser Mittellinie den Punkt sich verschiebend. Als Wegeslängen trägt man die Strecken von Mitte zu Mitte der Stationen auf. Die Bewegungen von Station zu Station, welche in Wirklichkeit zum Teil ungleichförmige sind, betrachtet man annähernd als gleichförmig, indem man die Bewegungsgesetze nach mittleren Geschwindigkeiten durch gerade Linien darstellt. Auf der wagerechten Grundlinie (Fig. 8) sind die Zeiten, von Mitternacht beginnend, aufgetragen, und zwar bedeuten die kleinen Teile je 10 Minuten. Auf der lotrechten Achse sind die Strecken der Bahnlinie, nach Kilometern angegeben, abgeteilt, und z. B. mit H (Hannover), S (Seelze), W (Wunstorf), B (Bückeburg) und M (Minden) bezeichnet.

Fig. 8.



Ein Nachtschnellzug, um 2 Uhr 25 Min. von Hannover abfahrend, trifft 2 Uhr 45 Min. in Wunstorf ein, fährt nach 1 Minute Aufenthalt weiter, ist 3 Uhr 16 Minuten in Bückeburg, hat 1 Minute Aufenthalt und langt 3 Uhr 37 Min. in Minden an. Dieser Zug ist durch die gebrochene Linie AC dargestellt. Den Stationsaufenthalt bezeichnet ein kurzer wagerechter Strich oder Absatz. Der Linienzug DE bezieht sich auf einen Gegenzug, der um 2 Uhr 11 Min. in Minden abfährt und 3 Uhr 12 Min. in Hannover eintrifft. Der Schnittpunkt F beider Linien kennzeichnet den Zeitpunkt und die Stelle (zwischen B und W), wo beide Züge aneinander vorbeifahren. Da die Eisenbahn doppelgleisig ist, kann dies auf freier Strecke (zwischen 2 Bahnhöfen) geschehen, wogegen es bei eingleisigen Bahnen nur auf einer Station möglich wäre. Der Linienzug GH bezeichnet einen Güterzug, dessen erheblich geringere Geschwindigkeit aus der schwächeren Ansteigung hervorgeht. Dieser Güterzug hält längere Zeit in Seelze und wird hier von dem ohne Aufenthalt durchfahrenden Schnellzug überholt. Linien, die nach derselben Seite hin ansteigen, bezeichnen Züge in derselben Richtung, die auf demselben Gleise fahren, sich daher nur auf Stationen überholen können. Dieserhalb dürfen Linien, die nach derselben Seite hin ansteigen, sich nur auf Stationslinien durchschneiden. Solche Fahrpläne enthalten in Wirklichkeit sämtliche Züge zu einem Bilde vereinigt und sind ein unentbehrliches Hülfsmittel des Betriebes, wenn es sich um Einlegung von Sonderzügen, um Ausführung von Gleisarbeiten u. dergl. handelt, weil man daraus klar erkennen kann, zu welchen Zeiten die Gleise für neue Züge oder für Arbeiten frei sind. In der wirklichen Ausführung liegt freilich die Zeitachse lotrecht, die Längenachse wagerecht, doch lediglich aus äufseren Zweckmäfsigkeits-Rücksichten, die mit dem Wesen der Sache nichts zu tun haben.

Die 33,8 km zwischen Wunstorf und Bückeburg werden in 30 Minuten zurückgelegt, d. h. mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1,127 Kilometern in der Minute

$$= 1{,}127\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{min}} = 60 \cdot 1{,}127\ {}^{\mathrm{km}}/_{60\ \mathrm{min}} = 67{,}62\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{std}} \text{ oder}$$

$$1127\ {}^{\mathrm{m}}/_{60\ \mathrm{sek}} = \frac{1127}{60}\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}} = 18{,}8\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}.$$

Eine sekundliche Geschwindigkeit von 20 m würde gleichbedeutend sein mit

$$20 \cdot \frac{3600}{3600}\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}} = 72000\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{std}} = 72\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{std}},$$

d. h. mit einer stündlichen Geschwindigkeit von 72 km, während

$$100\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{std}} = \frac{100000}{3600}\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}} = 27{,}78\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$$

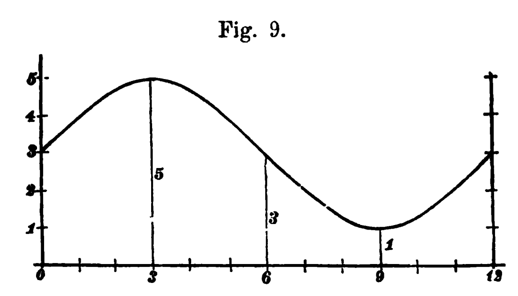
bedeuten.

Beispiel 2: Hat ein Radfahrer eine sekundliche Geschwindigkeit von 5 m, so legt er in der Stunde $5 \cdot 3600\ \mathrm{m} = 18\ \mathrm{km}$ zurück, oder es ist

$$5\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}} = \frac{5 \cdot 3600}{3600}\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}} = 18000\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{std}} = 18\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{std}}.$$

Beispiel 3: Die lotrechte Auf- und Abwärts-Bewegung eines der Ebbe und Flut unterworfenen Wasserspiegels erfolge nach dem Bewegungsgesetz $s = 3 + 2 \sin {}^{1}/_{6}\, \pi t$, wobei die Zeiten t in Stunden (abgekürzt std), die Wege s in Metern zu verstehen sind. Die Darstellung dieses Gesetzes (die Flutkurve) hat dann die Form der Fig. 9. Für $t = 3$ Stunden erreicht $\sin {}^{1}/_{6}\, \pi t$ seinen gröfsten Wert $\sin {}^{1}/_{2}\, \pi = 1$, für $t = 9$ std seinen kleinsten Wert $\sin {}^{3}/_{2}\, \pi = -1$, so dafs s zwischen dem gröfsten Werte 5 m und dem kleinsten Wert 1 m schwankt. Das Geschwindigkeits-Gesetz ist $v = {}^{1}/_{3}\, \pi \cos {}^{1}/_{6}\, \pi t = 1{,}047 \cdot \cos {}^{1}/_{6}\, \pi t$. Für $t = 0$, $t = 12$ und ganze Vielfache davon hat v seinen gröfsten Wert, nämlich $v_{max} = 1{,}047\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{std}}$. Für $t = 6$, $t = 18$, 30 u. s. w. hat v seinen gröfsten negativen oder seinen Minimalwert, nämlich $v_{min} = -1{,}047\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{std}}$. Die Geschwindigkeit v ist positiv, solange die Wegeslängenkurve nach rechts ansteigt, und umgekehrt; sie ist Null, wenn das Steigen in Fallen übergeht, und umgekehrt, d. h. an den höchsten und tiefsten Punkten der Kurve, nämlich für $t = 3, 9, 15$ u. s. w. — Fig. 9 stellt eine ideelle Flutkurve dar. Die wahren Flutkurven weichen davon zunächst grundsätzlich in der Weise ab, dafs wegen der Bewegung des Mondes um die Erde die Zeit zwischen zwei höchsten Wasserständen nicht 12 Stunden, sondern mehr, nämlich 12 Stunden 25 Minuten beträgt. Aufserdem enthalten die wirklichen Flutkurven Unregelmäfsigkeiten, die von der örtlichen Gestaltung der Flufsbetten, des Meerbodens, der Ufer, den Windverhältnissen u. s. w. abhängen.

Fig. 9.

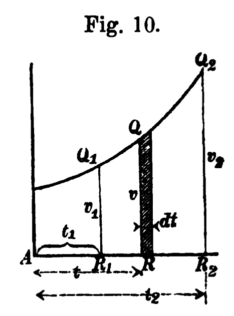


2. Darstellung des Geschwindigkeits-Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Wie s eine $f(t)$ war, so ist die Abgeleitete davon, nämlich v, ebenfalls eine $\varphi(t) = f'(t)$, welche das Geschwindigkeits-Gesetz heifsen möge und ebenfalls zeichnerisch dargestellt werden kann.

Während man aus der Darstellung des Bewegungsgesetzes die in einem beliebigen Zeitraume zurückgelegte Wegeslänge unmittelbar abgreifen konnte, ist dies aus dem Geschwindigkeits-Gesetze nicht ohne weiteres möglich. Da aber die Geschwindigkeit v aus dem Bewegungsgesetz $s = f(t)$ durch **Differentiation** $v = ds:dt$ zu finden war, so mufs man durch das umgekehrte Verfahren, d. h. durch Integration, auch von v zu s gelangen können. Es ist nämlich $ds = v \cdot dt$, folglich mittels sog. unbestimmter Integration

Fig. 10.



$$s = \int v \cdot dt + C.$$

Die im allgemeinen unbestimmte Integrations-Konstante C läfst sich feststellen, wenn zu einem bestimmten Werte von t der zugehörige Wert von s bekannt ist, etwa für den Anfang der Beobachtung $t = 0$ der Wert $s = s_0$.

Beispiel: Für die Bewegung eines Massenpunktes sei das Geschwindigkeitsgesetz $v = 3\,t^2$ gegeben; der Massenpunkt habe zu Anfang schon eine Entfernung $s_0 = 3$ m von dem gewählten Festpunkte der Bahnlinie. Dann ist

$$s = \int 3\,t^2\,dt + C = t^3 + C.$$

Die Gröfse C ist nun an die Bedingung gebunden, dafs die Gleichung für $t = 0$ den Wert $s = 3$ liefern mufs. Setzt man demnach diese beiden Gröfsen in die Gleichung ein, also $3 = 0 + C$, so bestimmt sich $C = 3$, und das Bewegungsgesetz lautet

$$s = 3 + t^3.$$

(Als Probe erhält man hieraus wieder $v = ds : dt = 3\,t^2$.)

Die Gleichung $ds = v \cdot dt$ hat übrigens auch eine geometrische Bedeutung, indem $v \cdot dt$ den Inhalt des unmittelbar rechts neben $v = RQ$ (Fig. 10) liegenden lotrechten Flächenstreifens der Geschwindigkeitskurve darstellt (mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Gröfse höherer Ordnung). Daher mufs die endliche Wegeslänge $s_2 - s_1$, die zwischen den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ zurückgelegt wird, durch die Summe aller zwischenliegenden Flächenstreifen,

d. h. durch die endliche Fläche $Q_1Q_2R_2R_1$ ausgedrückt sein. Oder: die während einer gewissen Zeit, d. h. zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten, zurückgelegte Wegeslänge wird dargestellt durch den Inhalt derjenigen Fläche, welche von der Geschwindigkeitskurve, der Zeitachse und den, jenen beiden Zeitpunkten entsprechenden Geschwindigkeits-Ordinaten eingeschlossen ist.

Analytisch bedeutet dies $s_2 - s_1 = \int_{t=t_1}^{t=t_2} v \cdot dt$, also das bestimmte Integral der Gleichung $ds = v \cdot dt$, zwischen den Zeitgrenzen t_1 und t_2 genommen.

Läfst man den auf der Bahnlinie (Fig. 2) zu wählenden Festpunkt mit der Anfangslage des beweglichen Punktes zusammenfallen, d. h. $s_0 = 0$ werden, so ergibt sich für die Wegeslänge von $t = 0$ bis $t = t$ (indem man $s_1 = s_0 = 0$, $t_1 = 0$ setzt und statt t_2 und s_2 einfach t und s schreibt): $s = \int_{t=0}^{t=t} v \cdot dt.$ (1

a) Gleichförmig veränderte Bewegung. Beschleunigung.

Der einfachste Fall einer ungleichförmigen (mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgenden) Bewegung ist offenbar ein solcher, wobei die ganze Geschwindigkeitsänderung während eines bestimmten Zeitraumes t sich gleichmäfsig über letzteren verteilt. Ist also c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach t Zeiteinheiten, so beträgt die ganze Geschwindigkeitsänderung $v - c$ während des Zeitraumes t. Soll diese Änderung sich gleichmäfsig über die Zeit t erstrecken, so mufs sie für jede Zeiteinheit $(v - c) : t$ betragen. Setzt man diese gleichbleibende Geschwindigkeitsänderung für jede Zeiteinheit $= p$, so wird die Gesamtänderung $v - c = pt$ oder

$$v = c + pt. \quad (2$$

Eine solche Bewegung, bei welcher die Änderung der Geschwindigkeit verhältnisgleich mit der entsprechenden Zeit erfolgt, heifst eine gleichförmig veränderte Bewegung, und Gl. 2 ist ihr Geschwindigkeitsgesetz.

Ist die in jeder Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeits-Änderung p positiv, d. h. eine Zunahme, so heifst sie **Beschleunigung**, und die Bewegung wird eine gleichförmig beschleunigte

genannt. Im entgegengesetzten Falle hat der Massenpunkt eine **gleichförmig verzögerte** Bewegung, und die dann negativ werdende Geschwindigkeits-Änderung in der Zeiteinheit heifst **Verzögerung**; das entsprechende Geschwindigkeitsgesetz ist

3) $$v = c - pt.$$

Offenbar kann eine Verzögerung einfach wie eine negative Beschleunigung behandelt werden.

Das Geschwindigkeitsgesetz $v = c + pt$, in welchem v und t veränderlich, c und p unveränderlich sind, wird durch eine ansteigende Grade BQ (Fig. 11) dargestellt. Die Beschleunigung

Fig. 11.

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{NQ}{BN} = \operatorname{tg} \alpha$$

erscheint dabei als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie BQ.

Die zufolge einer gleichförmig beschleunigten Bewegung während des Zeitraumes $t = AR$ zurückgelegte Wegeslänge s ist (nach dem allgemeinen Satze auf S. 11) gleich der Flächenzahl der Figur $ARQB$, d. h.

4) $$s = {}^1/_2 (v + c) t.$$

Soll s aber durch c, p und t ausgedrückt werden, so zerlege man das Trapez in das Rechteck $ABNR = ct$ und das Dreieck $BNQ = {}^1/_2 t \cdot NQ = {}^1/_2 t \cdot pt = {}^1/_2 pt^2$, so dafs

5) $$s = ct + {}^1/_2 pt^2$$

entsteht. Das Rechteck zeigt hierbei den Einflufs der Anfangsgeschwindigkeit, das Dreieck ${}^1/_2 pt^2$ dagegen den Einflufs der Beschleunigung auf die Wegeslänge. Will man endlich noch s durch c, v und p ausdrücken, so ersetze man in Gl. 4 die Gröfse t durch $\frac{v - c}{p}$, um zu erhalten

6) $$s = \frac{v + c}{2} \frac{v - c}{p} = \frac{v^2 - c^2}{2p}.$$

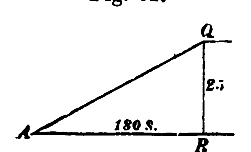
Für die gleichförmig verzögerte Bewegung, bei der $c > v$, gelten die Gleichungen 3, 5 und 6 ebenfalls, sobald darin $+ p$ mit $- p$ vertauscht wird.

Legt man Meter und Sekunden zu Grunde, so kann eine Geschwindigkeit geschrieben werden: $v\, {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$. Die Beschleunigung ist

aber eine Geschwindigkeitszunahme, geteilt durch eine Zeit oder die auf die Zeiteinheit bezogene Geschwindigkeitszunahme, ist daher zu schreiben $p\,^{m}/_{sek^2}$ und zu sprechen: p Meter in der Quadratsekunde. (Vorschlag von A. Hasselblatt, Petersburg.)

Beispiel 1: Ein Eisenbahnzug setze sich vom Bahnhof aus in Bewegung und habe, nachdem 180 Sekunden seit der Abfahrt verstrichen sind, seine volle Geschwindigkeit von $25\,^{m}/_{sek}$ erreicht; es soll unter der Annahme, dafs die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte sei, die Gröfse der Beschleunigung, sowie die während der Anfahrt (d. h. der $180\,^{sek}$) zurückgelegte Wegeslänge berechnet werden.

Fig. 12.



Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes (Fig. 12) ist in diesem Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit = 0, ein Dreieck. Die Beschleunigung ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden AQ, mithin

$$p = \frac{25}{180} = \frac{1}{7{,}2} = 0{,}14\,^{m}/_{sek^2},$$

oder es wächst die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um $0{,}14\,^{m}/_{sek}$.

In $^{km}/_{std^2}$, d. h. in Kilometern für die Quadratstunde, ausgedrückt, wird

$$p = \frac{1}{7{,}2}\,\frac{3600 \cdot 3600\,^{m}}{(3600\,^{sek})^2} = 1\,800\,000\,^{m}/_{std^2} = 1800\,^{km}/_{std^2},$$

wovon man sich auch leicht überzeugt, wenn man die Aufgabe mit

$$v = 90\,^{km}/_{std} \quad \text{und} \quad t = 180\,^{sek} = \frac{1\,^{std}}{20} \quad \text{durchführt.}$$

Die Wegeslänge während der Anfahrt wird gemessen durch den Inhalt des Dreiecks AQR, d. h. es ist

$$s = \frac{180 \cdot 25}{2} = 2250\,^{m}.$$

Wenn der Zug auf freier Strecke die soeben erlangte Geschwindigkeit unverändert beibehält, so ist die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes dieser nun gleichförmigen Bewegung eine durch den Punkt Q gezogene Wagerechte.

Soll der Zug nun auf der nächsten Haltestelle zum Stillstande kommen, so mufs er durch geeignete Mittel (Widerstände, Bremsen, unter Abstellung des Dampfes der Lokomotive) verzögert werden. Es seien diese Mittel so beschaffen, dafs sie dem Zug eine gleichbleibende Verzögerung von $0{,}4\,^{m}/_{sek^2}$ erteilen; wie lange wird diese gleichförmig verzögerte Bewegung bis zum Stillstande währen, und wie grofs wird ihre Wegeslänge sein, d. h. in welcher Entfernung vor der Haltestelle mufs sie beginnen (müssen die Bremsen angezogen werden)?

Fig. 12 a.

Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes sei Q_1B (Fig. 12 a). Da die Geschwindigkeit von $25\,^{m}/_{sek}$ während jeder Sekunde um $0{,}4\,^{m}/_{sek}$ sich vermindert, so sind $25 : 0{,}4 = 62{,}5\,^{sek} = R_1B$ zur

völligen Aufzehrung der Geschwindigkeit erforderlich. Die Wegeslänge in diesen 62,5 sek beträgt nach der Figur $^1/_2 \cdot 25 \cdot 62{,}5 = 781{,}25$ m; d. h. etwa 781 m vor der Haltestelle mufs die Verzögerung beginnen.

Die Wegeslängen der gleichförmig beschleunigten und verzögerten Bewegungen würden bei gleichbleibender Geschwindigkeit von 25 m/sek je in der Hälfte der Zeit zurückgelegt sein. Durch Anhalten und Wiederanfahren gehen daher, im Vergleiche zum einfachen Durchfahren, $90 + 31{,}25 = 121{,}25$ sek oder rund 2 Minuten verloren. Mit Einschlufs von einer Minute Aufenthalt kostet also jeder Haltepunkt einem Schnellzuge 3 Minuten Mehraufwand an Zeit.

Die Annahme, dafs die Anfahrt und das Anhalten gleichförmig veränderte Bewegungen seien, ist eine vereinfachende Voraussetzung; das wahre Geschwindigkeitsgesetz wird sich nicht durch gerade Linien darstellen, ist vielmehr schwieriger zu ermitteln und hängt von vielen Umständen ab, die hier nicht berücksichtigt werden können.

Beispiel 2: Ein Gewehrgeschofs verlasse den 0,8 m langen Gewehrlauf mit einer sekundlichen Geschwindigkeit von 400 m. Wenn man nun die im Augenblicke des Abfeuerns mit der Geschwindigkeit Null beginnende beschleunigte Bewegung des Geschosses im Rohre wieder annähernd als gleichförmig beschleunigt betrachtet, wie lange dauert sodann die Bewegung im Rohr und wie grofs ist die Beschleunigung?

Die Geschwindigkeitsfigur ist wiederum ein Dreieck, dessen Inhalt $= 0{,}8$ (Wegeslänge) sein mufs. Nennt man die Zeit t, so ist $\frac{400}{2} t = 0{,}8$, d. h.

$$t = \frac{0{,}8}{200} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} \text{ sek}.$$

In dieser geringen Zeit wächst die sekundliche Geschwindigkeit von Null auf 400 m; die Beschleunigung beträgt also $400 : \frac{1}{250} = 400 \cdot 250 = 100\,000 \text{ m/sek}^2$.

Diese überraschend grofse Zahl ist so zu verstehen, dafs, wenn die gleichförmig beschleunigte Bewegung unter Einwirkung der Pulvergase 1 Sekunde lang in unveränderter Weise fortdauerte, eine Geschwindigkeit von 100 000 m/sek entstehen würde. Die beschleunigte Bewegung in dem Rohre währt aber nur $^1/_{250}$ sek und bringt daher nur 400 m/sek Geschwindigkeit hervor.

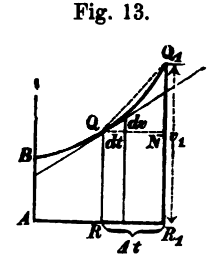
b) Ungleichförmig veränderte Bewegung.

Ändert sich die Geschwindigkeit einer Bewegung nicht verhältnismäfsig mit der Zeit, so heifst die Bewegung eine ungleichförmig veränderte; das Geschwindigkeitsgesetz ist dann nicht mehr einfach geradlinig, sondern von der allgemeinen Form $v = \varphi(t)$, oder die Geschwindigkeitslinie ist irgend eine Kurve.

In derselben Weise nun, wie auf S. 6 der Begriff der Geschwindigkeit, ausgehend von der gleichförmigen Bewegung, durch

Verallgemeinerung auf beliebige Bewegungen ausgedehnt wurde, findet auch hinsichtlich der Beschleunigung der geradlinigen Bewegung eine allgemeinere Fassung des Begriffes statt.

Fig. 13.



Ist BQQ_1 (Fig. 13) die Geschwindigkeitslinie, so erfolgt in dem Zeitraume $RR_1 = \Delta t$ eine Geschwindigkeitszunahme $NQ_1 = \Delta v$. Zieht man nun die Sehne QQ_1, so ist diese die Geschwindigkeitslinie einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, vermöge welcher die Geschwindigkeit in dem Zeitraume Δt von v auf $v + \Delta v$, also um die gleiche Gröfse, wächst wie bei der gegebenen Bewegung. $p_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist dann die mittlere Beschleunigung für diesen bestimmten Zeitraum RR_1. Wenn der beliebige Zeitraum Δt zur Grenze Null herabsinkt, nähert sich diese mittlere Beschleunigung p_m einem bestimmten Grenzwerte p, und diesen Grenzwert $p = lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder

1) $$p = \frac{dv}{dt}$$

nennt man die **Beschleunigung** zur Zeit t. Die Beschleunigung p ist die Abgeleitete der Geschwindigkeit v nach der Zeit t, oder die zweite Abgeleitete der Wegeslänge s nach der Zeit t.

2) $$v = \varphi(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t); \quad p = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

Die Beschleunigung erscheint wegen $p = dv : dt$ als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie, ebenso wie die Geschwindigkeit das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängenkurve (S. 6) war.

Beispiel: Zu dem Bewegungsgesetz $s = 3 + 2 \sin {}^1/_6 \pi t$ (S. 9) gehörte das Geschwindigkeitsgesetz $v = {}^1/_3 \pi \cos {}^1/_6 \pi t = 1{,}047 \cos {}^1/_6 \pi t$. Hieraus ergibt sich die veränderliche Beschleunigung

$$p = -\frac{1}{18}\pi^2 \sin \frac{1}{6}\pi t = -0{,}548 \sin \frac{1}{6}\pi t.$$

Indem man $p = dv : dt$ oder $dv = p\,dt$ schreibt, betrachtet man die Geschwindigkeitsänderung dv als verhältnisgleich mit der

Zeit dt, betrachtet also ein Teilchen der beliebigen Bewegung als gleichförmig verändert. Für einen endlichen Zeitraum $t_1 - t$ ist dann die Geschwindigkeitszunahme

$$3)\qquad v_1 - v = \int_t^{t_1} p \cdot dt;$$

oder man kann auch die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t in Form eines unbestimmten Integrals

$$4)\qquad v = \int p\,dt + C$$

schreiben, worin der Wert C bestimmt werden kann, wenn für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit bekannt ist.

Beispiel 1: Das gegebene Bewegungsgesetz sei (auf Meter und Sekunden bezogen)

$$s = 2 + 6t - 2t^2 + {}^1/_3\, t^3;$$

dann ergibt sich die Geschwindigkeit

$$v = ds : dt = 6 - 4t + t^2,$$

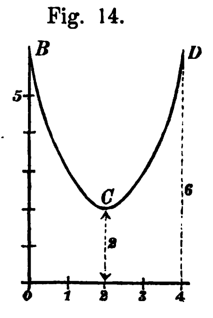
die Beschleunigung

$$p = dv : dt = -4 + 2t.$$

Man erkennt, dafs hier eine ungleichförmig veränderte Bewegung vorliegt, da p mit der Zeit t veränderlich. Zu Anfang, d. h. für $t = 0$ ist $p = -4\,{}^{m}/_{sek^2}$, die Bewegung ist also eine verzögerte; die Geschwindigkeit, welche zu Anfang $6\,{}^{m}/_{sek}$ betrug, nimmt zunächst ab. Es ist aber $p \lesseqgtr 0$ für $t \lesseqgtr 2^{sek}$. Die Geschwindigkeits-Abnahme hört also auf nach 2 Sekunden, und es beginnt dann eine beschleunigte Bewegung, und zwar wächst nun auch die Beschleunigung verhältnisgleich mit der Zeit. Der Zeitpunkt $t = 2^{sek}$, wo die Geschwindigkeit aufhört abzunehmen und zu wachsen beginnt, gibt für v einen Kleinstwert $v_{min} = 2\,{}^{m}/_{sek}$. Die Geschwindigkeitslinie ist eine Parabel mit lotrecht aufwärts gerichteter Achse; der Scheitel entspricht dem Zeitwerte $t = 2$ Sekunden. Die während der ersten 4 Sekunden zurückgelegte Wegeslänge $s - s_0$ ist leicht als die unterhalb der Parabel BCD (Fig. 14) befindliche Fläche zu berechnen. Da man weifs, dafs die Parabelfläche $BCD = {}^2/_3$ des umschriebenen Rechtecks ist, so wird

$$s - s_0 = 6 \cdot 4 - {}^2/_3\,(6 - 2)\,4 = 13^1/_3\,{}^{m}.$$

Fig. 14.



Zur Prüfung liefert das Bewegungsgesetz

für $t = 4$ $\quad s = 15^1/_3$,

für $t = 0$ $\quad s_0 = 2$, mithin $s - s_0 = 13^1/_3\,{}^{m}$.

Beispiel 2: Eine geradlinige Bewegung erfolge mit der Beschleunigung $p = 2 + 3t^2$, und es sei für $t = 0$: $v = c = 1$, $s_0 = 0$. Dann wird aus

$$dv = (2 + 3t^2)\,dt$$

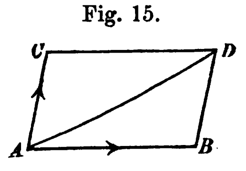
$$v - 1 = \int_0^t (2 + 3t^2)\,dt = 2t + t^3 \text{ oder } v = 1 + 2t + t^3 \text{ und}$$

$$s = \int_0^t (1 + 2t + t^3)\,dt = t + t^2 + {}^1/_4\, t^4.$$

3. Zusammensetzung mehrerer gleichzeitigen Bewegungen eines Punktes.

Ein Massenpunkt durchlaufe während der Zeit t die Bahnlinie AB (Fig. 15), und zwar in der Richtung von A nach B; diese Bahnlinie gehöre aber einem Körper an, welcher sich derartig parallel verschiebt, daſs der Punkt A der Linie AB während der Zeit t die Bewegung AC ausführt und die ganze Bahnlinie AB in die parallele Lage CD kommt. Dann wird der Massenpunkt infolge der beiden gleichzeitigen Bewegungen aus der Anfangslage A in irgend einer Bahnlinie nach D gelangen, und man nennt diese wahre Bewegung AD die Mittelbewegung oder Resultierende aus den beiden Seitenbewegungen AB und AC.

Fig. 15.



Anstatt diese wahre Bewegung AD als das Ergebnis der Bewegungen AB und AC zu bezeichnen, sagt man auch wohl kürzer, der Massenpunkt führe zwei gleichzeitige Seitenbewegungen aus, womit aber stets nur der beschriebene Vorgang gemeint sein soll. Da die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm ist, so ergibt sich ohne weiteres der **Satz vom Parallelogramm der Bewegungen:**

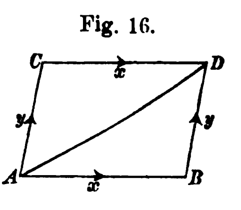
Führt ein Massenpunkt gleichzeitig zwei Seitenbewegungen aus, so ist der dem Anfangspunkt A gegenüberliegende Eckpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gezeichneten Parallelogrammes der wahre Ort des Punktes.

Man denke sich auf dem Stabe AB ein Sonnenkäferchen entlang laufend, während man den Stab parallel nach CD verschiebt; dann gelangt das Sonnenkäferchen in Wirklichkeit von A nach D.

Eine Gerade AB von bestimmter Richtung, bestimmter Gröſse und einem Pfeile, der einen bestimmten Bewegungssinn angibt,

nennt man eine Strecke. AB sei die Strecke x, AC die Strecke y. Zur Bestimmung des Punktes D ist offenbar nicht die Zeichnung des ganzen Parallelogramms erforderlich; vielmehr genügt es, an den Endpunkt B der Strecke x die parallel verschobene Strecke $BD = y$ anzutragen (Fig. 16). Beide bilden dann einen sog. „Streckenzug“, und man kann sagen: Der wahre Ort D des Punktes ist der Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges. Die Reihenfolge der Zusammensetzung ist offenbar gleichgültig. Der Streckenzug $AC = y$ und $CD = x$ führt zu demselben Endpunkte D.

Fig. 16.



Sind die Gesetze der beiden Seitenbewegungen bekannt, so daſs man für den Zeitpunkt t die Strecken x und y berechnen kann, so ist auch der Ort des beweglichen Punktes für jeden Zeitwert t bekannt und damit auch die Bahnlinie der Mittelbewegung AD völlig bestimmt.

Fig. 17.

Beispiel: Die eine Seitenbewegung folge dem Gesetze $x = t$ (in Metern und Sekunden), sei also gleichförmig, die andere dem Gesetz

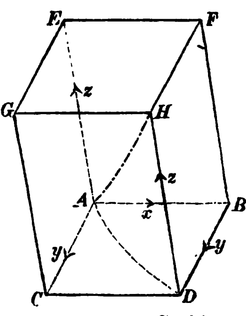
$$y = {}^1/_2\, t + {}^1/_{10}\, t^2$$

(also gleichförmig beschleunigt). Dann ist für

$t = 0$	1	2	3	4	5
$x = 0$	1	2	3	4	5
$y = 0$	0,6	1,4	2,4	3,6	5.

Die Gleichung der Bahnlinie findet man, indem man $t = x$ in die Gleichung für y einsetzt, $y = {}^1/_2\, x + {}^1/_{10}\, x^2$. Dies bedeutet eine Parabel als Bahnlinie des Punktes.

Fig. 18.



Erleidet, während die Seitenbewegungen AB und AC erfolgen, die ganze Ebene derselben eine Parallelverschiebung z in der Richtung von A nach E (Fig. 18), so wird der Massenpunkt, der infolge der beiden Bewegungen x und y nach D gelangen würde, sich nunmehr nach H bewegen, und es folgt der **Satz vom Parallelepiped der Bewegungen:**

Hat ein Massenpunkt drei gleichzeitige Seitenbewegungen, so ist der dem Anfangspunkt A gegenüber-

liegende Eckpunkt H des aus den drei Seitenbewegungen bestimmten Parallelepipeds, oder der Endpunkt des aus den Seitenbewegungen x, y und z gebildeten Streckenzuges $ABDH$ der wahre Ort des Punktes.

Als Beispiel könnten die Bewegungsgesetze: $x = t$; $y = {}^1/_3 t + {}^1/_{10} t^2$; $z = 3t$ benutzt werden.

Im allgemeinen ist die wahre Bahnlinie eine räumliche Kurve.

a) Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmige, geradlinige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w bezw. u; dann sind die Wegeslängen nach t Zeiteinheiten (Fig. 19)

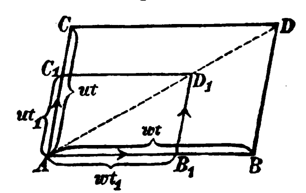


Fig. 19.

$$AB = x = wt \text{ und } AC = y = ut;$$

innerhalb eines anderen, etwa kleineren Zeitraumes t_1:

$$AB_1 = x_1 = wt_1 \text{ und}$$
$$AC_1 = y_1 = ut_1 .$$

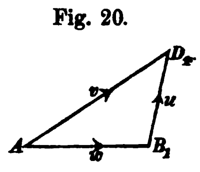
Der wahre Ort nach t bezw. t_1 Zeiteinheiten ergibt sich durch den Streckenzug ABD bezw. AB_1D_1 zu D bezw. D_1. Es findet aber statt:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}; \; \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{t}{t_1}, \text{ also } \frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1},$$

mithin sind die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, so dafs A, D_1 und D auf derselben Geraden liegen müssen. Da dies für alle Werte für t und t_1 gilt, so mufs die wahre oder Mittelbewegung geradlinig erfolgen. Zugleich ist aber auch wegen der Ähnlichkeit $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}$, oder die Wegeslängen AD und AD_1 sind den entsprechenden Zeiten t und t_1 verhältnisgleich. Die Mittelbewegung aus zwei geradlinigen und gleichförmigen Seitenbewegungen ist hiernach ebenfalls geradlinig und gleichförmig. Ihre Geschwindigkeit v erhält man, indem man den willkürlichen Zeitraum t_1 zur Zeiteinheit werden läfst. Dann wird $AB_1 = w$; $B_1D_1 = u$ und $AD_1 = v$, oder die Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung erscheint als die Schlufsseite eines aus den

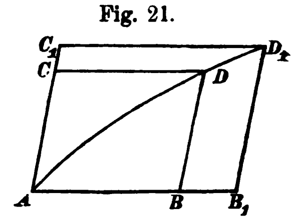
Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges (Fig. 20). Der Pfeil der Schlufsseite eines Streckenzuges wird stets von dem Anfange nach dem Ende des Streckenzuges verstanden, wie es sich hier bezüglich der Geschwindigkeit v als notwendig ergibt. Die in dieser Weise verstandene Schlufsstrecke eines Streckenzuges heifst auch die geometrische Summe der Einzelstrecken.

Fig. 20.



2) Sind die beiden Seitenbewegungen nicht gleichförmig, erfolgen sie vielmehr nach beliebigen Bewegungsgesetzen $AB = x = f(t)$ und $AC = y = \varphi(t)$ (Fig. 21), so ändern sich AB und AC im allgemeinen nicht verhältnisgleich; es wird daher die Mittelbewegung krummlinig ausfallen. Gleichwohl läfst sich für jeden Zeitpunkt t der wahre Ort des Massenpunktes aus den Seitenbewegungen x und y konstruieren. Ändert sich t um dt, so werden in diesem Zeitteilchen die Seitenbewegungen $BB_1 = dx$, $CC_1 = dy$ zurückgelegt, und der Massenpunkt gelangt von D nach D_1. Nun sind aber die Geschwindigkeiten der beiden Seitenbewegungen im Zeitpunke t: $w = \frac{dx}{dt}$ bezw. $u = \frac{dy}{dt}$. Setzt man hiernach $dx = w\,dt$ und $dy = u\,dt$, so betrachtet man für die Dauer eines Zeitteilchens dt die Seitenbewegungen als gleichförmig, so dafs für die augenblickliche Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung die für gleichförmige Bewegungen abgeleitete Fig. 20 gültig bleibt. Die Richtung der Geschwindigkeit v fällt hiernach mit der Sehne DD_1, also, da diese unendlich klein, mit der Richtung der Bahnlinie, d. h. mit der Bewegungsrichtung zusammen. Auch ist, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{DD_1}{dt} = \frac{ds}{dt}$. Die Geschwindigkeiten w und u der Seitenbewegungen nennt man kürzer die Seitengeschwindigkeiten des Massenpunktes, v die wahre oder Mittelgeschwindigkeit. Es gilt also für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen der Satz vom Parallelogramm oder vom Dreieck der Geschwindigkeiten: Die Mittelgeschwindigkeit ist die

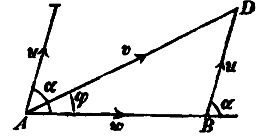
Fig. 21.



Diagonale eines Parallelogrammes aus den Seitengeschwindigkeiten, oder die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten.

Hiernach kann die Mittelgeschwindigkeit, die wahre oder resultierende Geschwindigkeit durch Zeichnung gefunden werden; will man aber ihre Gröfse und Richtung durch Rechnung bestimmen, so bedenke man, dafs in dem Dreieck ABD (Fig. 22)

Fig. 22.



$v^2 = w^2 + u^2 - 2wu \cos ABD$, oder

weil $\cos ABD = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,

$$1)\quad v = \sqrt{w^2 + u^2 + 2wu\cos\alpha}\,;$$

ebenso gilt $\sin\varphi : \sin ABD = u : v$, also, weil $\sin ABD = \sin\alpha$,

$$2)\quad \sin\varphi = \sin\alpha\,\frac{u}{v}.$$

Gl. 1 liefert die Gröfse, Gl. 2 sodann die Richtung von v. Dabei ist zu bemerken, dafs die Strecken w und u stets in der Weise aneinander zu setzen sind, dafs die Pfeile in dem Zuge ABD übereinstimmenden Umfahrungssinn haben, und dafs dann der Pfeil von v stets vom Anfang A nach dem Endpunkte D des Streckenzuges gerichtet ist.

Je kleiner der Winkel α wird, desto mehr nähert sich u der Richtung von AB, desto näher fällt also auch v der Richtung von w. Fallen schliefslich w und u in dieselbe Richtung, so wird $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, und man erhält $v = w + u$; $\varphi = 0$. In diesem Falle wird die Mittelgeschwindigkeit v, welche allgemein die geometrische Summe von w und u, auch arithmetisch gleich der Summe von w und u.

Je mehr sich der Winkel α dem Winkel π nähert, desto niedriger wird wiederum das Geschwindigkeits-Dreieck, desto kleiner wird die Schlufsseite v. Ist $\alpha = \pi$, so wird $\cos\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$, mithin, wenn $w > u$ gedacht ist, $v = w - u$; $\varphi = 0$.

In beiden Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ wird v die algebraische Summe von w und u, nämlich $w + u$ bezw. $w - u$.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Fall, wo die beiden Seitengeschwindigkeiten zueinander rechtwinklig stehen (Fig. 23). Es ist dann

Fig. 23.

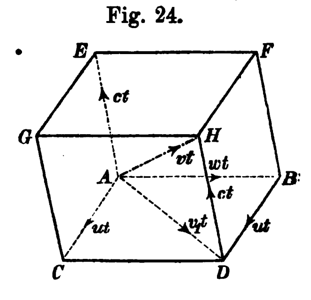
$$v = \sqrt{w^2 + u^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = u : w.$$

Ist z. B., bezogen auf Sekunden und Meter, $w = 2$, $u = 1$, so wird

$$v = \sqrt{5} = 2{,}236; \quad \operatorname{tg} \varphi = {}^1/_2, \quad \varphi = 26^{\circ}\,34'.$$

3) Hat man drei, nicht in derselben Ebene liegende, **g l e i c h f ö r m i g e** Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w, u und c zusammenzusetzen (Fig. 24), so liefern zunächst zwei derselben, AB und AC, als Mittelbewegung wiederum eine geradlinige gleichförmige Bewegung AD mit der Geschwindigkeit v_1, welche aus dem Streckenzuge AB und BD als AD gefunden wird. Fügt man nun zu der Bewegung AD noch die dritte Seitenbewegung AE hinzu, so hat man wiederum zwei geradlinige, gleichförmige Bewegungen zusammenzusetzen; man verlegt daher ct parallel an den Endpunkt D von AD und erhält H als Endpunkt der wahren oder Mittelbewegung, welche geradlinig und gleichförmig von A nach H erfolgen mufs.

Fig. 24.



Läfst man in Fig. 24 $t = 1$ werden, so erscheint **d i e w a h r e o d e r M i t t e l g e s c h w i n d i g k e i t** v **a l s D i a g o n a l e e i n e s P a r a l l e l e p i p e d s a u s d e n d r e i S e i t e n g e s c h w i n d i g k e i t e n, o d e r a l s d i e S c h l u f s s e i t e e i n e s r ä u m l i c h e n, a u s d e n d r e i S e i t e n g e s c h w i n d i g k e i t e n g e b i l d e t e n S t r e c k e n z u g e s, w e l c h e m a n a u c h w i e d e r u m d i e g e o m e t r i s c h e S u m m e d e r S e i t e n g e s c h w i n d i g k e i t e n n e n n e n k a n n.**

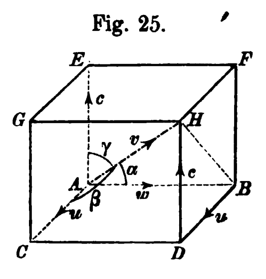
Dieser Satz vom Parallelepiped oder (räumlichen) Viereck der Geschwindigkeiten erhält auch Gültigkeit für ungleichförmige Seitenbewegungen, wenn man dieselben Betrachtungen anstellt, wie auf S. 20 bezüglich zweier Seitenbewegungen geschah.

Stehen die 3 Seitengeschwindigkeiten rechtwinklig zueinander (Fig. 25), so wird die wahre (resultierende) oder Mittelgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{w^2 + u^2 + c^2},$$

und für die Neigungswinkel α, β und γ der Geschwindigkeit v gegen die Richtungen w, u und c ergibt sich, weil die Seitenfläche $BDHF$ rechtwinklig zu w steht, also auch $\measuredangle ABH$ ein Rechter, $\cos \alpha = w : v$; ebenso $\cos \beta = u : v$ und $\cos \gamma = c : v$.

Fig. 25.



b) Zusammensetzung der Beschleunigungen.

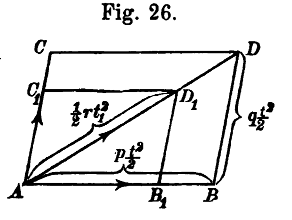
1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen AB und AC, welche beide mit den Geschwindigkeiten Null beginnen. Die Beschleunigungen seien p und q (Fig. 26); dann ist in t Zeiteinheiten (nach Gl. 5, S. 12):

$$AB = {}^1/_2 p t^2; \quad BD = {}^1/_2 q t^2,$$

in t_1 Zeiteinheiten:

$$AB_1 = {}^1/_2 p t_1^2; \quad B_1 D_1 = {}^1/_2 q t_1^2.$$

Fig. 26.



Die wahren Orte des Massenpunktes sind D bezw. D_1. Somit ist $\frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{BD}{B_1 D_1}$; es sind also die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, daher die wahre Bewegung geradlinig. Für die Wegeslängen gilt aber $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^2}$, oder sie sind mit den Quadraten der entsprechenden Zeiten verhältnisgleich. Für ein solches Bewegungsgesetz $s = at^2$ gilt aber $v = 2\,at$, d. h. die Mittelbewegung ist wiederum eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Nennt man sodann die Beschleunigung dieser Bewegung r, so kann $AD = {}^1/_2 r t^2$ $AD_1 = {}^1/_2 r t_1^2$ gesetzt werden. Wählt man endlich den beliebigen Zeitraum t_1 so, dafs ${}^1/_2\, t_1^2 = 1$ wird, so werden AB_1, B_1D_1 und AD_1 bezw. zu p, q und r, und es erscheint die Beschleunigung der wahren oder Mittelbewegung, welche kürzer die **Mittelbeschleunigung** genannt wird, ebenso wie die Geschwindigkeit, als **Schlufslinie eines aus den Seitenbeschleunigungen**

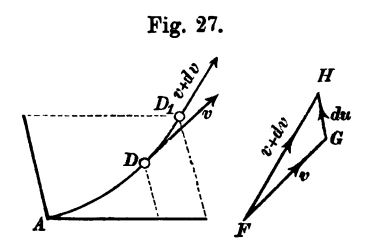
gebildeten Streckenzuges, als geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen, oder als Diagonale eines Parallelogramms aus den Seitenbeschleunigungen.

2) Dies gilt einstweilen nur, wenn die beiden Seitenbewegungen gleichförmig beschleunigt sind und mit der Geschwindigkeit Null beginnen, so dafs die Mittelbewegung geradlinig wird. Erfolgen die Seitenbewegungen aber nach beliebigen Bewegungsgesetzen, so entsteht eine krummlinige Bewegung, und für diese mufs der Begriff der Beschleunigung erst eine Verallgemeinerung erfahren.

Die Richtung der Geschwindigkeit fällt nach Seite 20 mit der Bewegungsrichtung zusammen. Bei einer geradlinigen Bewegung bleibt also die Richtung der Geschwindigkeit dieselbe, es ändert sich nur deren Gröfse, und zwar während des Zeitteilchens dt um $dv = p dt$. Diese Vergröfserung von v kann man nun auch so auffassen, als ob zu der früheren Geschwindigkeit v eine neue Geschwindigkeit $dv = p dt$ hinzugetreten wäre, und man nennt diese letztere die Elementarbeschleunigung, welche mittels Teilung durch das Zeitteilchen dt die (auf die Zeiteinheit bezogene) Beschleunigung $p = dv : dt$ liefert.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeitteilchen dt sowohl die Gröfse, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit (Fig. 27); diejenige Geschwindigkeit nun, welche mit der im Zeitpunkte t vorhandenen Geschwindigkeit v zusammengesetzt werden mufs, um mit ihr die für den Zeitpunkt $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Gröfse und Richtung zu ergeben, heifst wiederum die Elementarbeschleunigung, welche dann, durch dt geteilt, die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte t nach Gröfse und Richtung liefert.

Fig. 27.

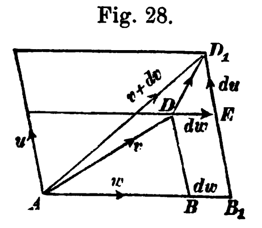


Stellt also in Fig. 27 FG die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t, FH die Geschwindigkeit $v + dv$ im Zeitpunkte $t + dt$ dar, so ist GH die Elementarbeschleunigung $= du$. Letztere kann offenbar als die geometrische Differenz zwischen $v + dv$ und v, oder weil sie unendlich klein, als das geometrische Differential von v bezeichnet werden.

Die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung ADD_1 im Zeitpunkte t bezeichnet man nun als $p = du : dt$, d. h. als die geometrische Abgeleitete von v nach t und als mit der Richtung von du übereinstimmend. Die Beschleunigung weicht hiernach bei krummliniger Bewegung stets von der Bewegungsrichtung (v) ab.

Bei der Zusammensetzung zweier beliebigen geradlinigen Seitenbewegungen ist nun die Geschwindigkeit $v = AD$ im Zeitpunkte t (Fig. 28) die Mittelgeschwindigkeit aus w und u, die Geschwindigkeit $v + dv = AD_1$ im Zeitpunkte $t + dt$ die Mittelgeschwindigkeit aus $w + dw$ und $u + du$. Legt man beide Streckenzüge so aufeinander, dafs v und $v + dv$ gemeinsamen Anfangspunkt A haben, so ist DD_1 die geometrische Differenz von $v + dv$ und v, oder die Elementarbeschleunigung $= r \cdot dt$, wenn r die Beschleunigung. DD_1 ist aber die Schlufsseite eines aus $dw = p \cdot dt$ und $du = q \cdot dt$ gebildeten Streckenzuges DED_1. Dasselbe Verhältnis mufs also auch zwischen r, p und q bestehen; mithin gilt auch für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen das auf S. 23 unter 1 ausgesprochene Gesetz für die Beschleunigung.

Fig. 28.



Für die Berechnung der Gröfse und Richtung der Mittelbeschleunigung r gelten dieselben Formeln wie für die Geschwindigkeit (S. 21); man braucht in denselben nur w, u und v mit p, q und r zu vertauschen.

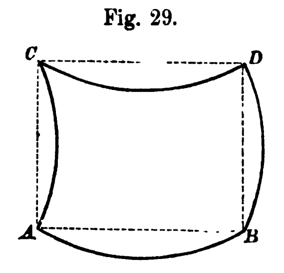
Ähnliche Betrachtungen, wie solche bezüglich der Geschwindigkeiten (S. 22 und 23) angestellt wurden, führen auch leicht zum Satze vom Parallelepiped oder Viereck der Beschleunigungen.

c) Zusammensetzung krummliniger Seitenbewegungen.

Die im vorstehenden ausführlich entwickelten Gesetze für die Zusammensetzung von zwei oder drei Bewegungen, von deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bleiben auch noch gültig, wenn die Seitenbewegungen nicht geradlinig, sondern krummlinig erfolgen. Unerläfsliche Bedingung hierfür ist aber, dafs die bewegliche Bahnlinie eine reine Parallelverschiebung erfahre.

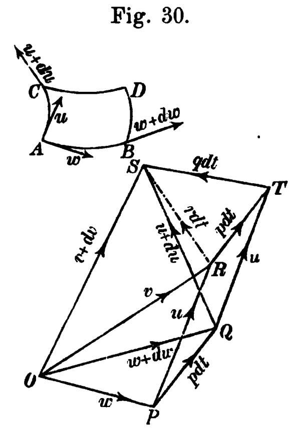
Bewegt sich der Massenpunkt in der Bahnlinie AB (Fig. 29), während diese eine Verschiebung in die Lage CD erfährt, so erkennt man leicht, dafs D der Ort des Massenpunktes nach der Bewegung sein mufs, und dafs es gleichgültig ist, ob man den Punkt D mittels der wahren Bewegungslinien AB, AC und BD festlegt, oder ob man die Sehnen AB, AC und BD benutzt und aus ihnen ein Parallelogramm oder einen Streckenzug ABD bildet. Auch für die Geschwindigkeit v der wahren Bewegung in irgend einem Zeitpunkte t mufs der früher (S. 21) bewiesene Satz aus dem Grunde gültig bleiben, weil mit dem Begriffe der Geschwindigkeit grundsätzlich die Vorstellung verbunden ist, dafs man jede krummlinige Bewegung für ein unendlich kleines Zeitteilchen als geradlinig und gleichförmig betrachten darf, so dafs man es in jedem Zeitpunkte nur mit der Zusammensetzung der Geschwindigkeit solcher einfachen Bewegungen zu tun hat.

Fig. 29.



Dafs auch bezüglich der Beschleunigungen das Entsprechende gilt, ergibt sich durch folgende Betrachtung: AB und AC (Fig. 30) seien die Seitenbewegungen während eines Zeitteilchens; w und $w + dw$ bezw. u und $u + du$ die Seitengeschwindigkeiten zu Anfang und zu Ende desselben. Man trage w und $w + dw$ von einem Punkte O aus auf. Setze daran die Strecken $PR = u$ bezw. $QS = u + du$. Dann ist $OR = v$ die wahre Geschwindigkeit im Zeitpunkte t, $OS = v + dv$ diejenige im Zeitpunkte $t + dt$. Darnach wird dann $RS = r \cdot dt$ die Elementarbeschleunigung und $r = RS : dt$ die Beschleunigung der Mittelbewegung; $PQ = p \cdot dt$ ist die Elementarbeschleunigung der ersten Seitenbewegung. Macht man nun $QT =$ und $\parallel PR = u$, so wird $TS = q \cdot dt$ die zweite Elementarbeschleunigung, und weil

Fig. 30.



$$RT \mathrel{\#} PQ = p \cdot dt,$$

so erscheint $RS = r \cdot dt$ als Schlufslinie eines Streckenzuges aus

$RT = p \cdot dt$ und $TS = q \cdot dt$. Mithin mufs auch r die Schlufslinie eines Streckenzuges aus p und q sein. Damit ist der Satz vom Dreieck oder Parallelogramm der Beschleunigungen allgemein bewiesen. Die Erweiterung zum Satze vom Parallelepiped bezw. räumlichen Viereck der Beschleunigungen hat keine Schwierigkeit.

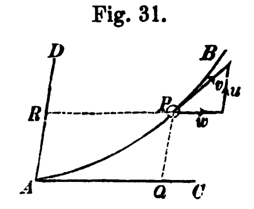
Erfährt aber die Bahnlinie AB nicht eine einfache Parallelverschiebung, sondern eine allgemeinere Bewegung, so werden die Beziehungen der wahren oder Mittelbewegung verwickelter; dieser schwierige Fall wird erst später in der Allgemeinen Mechanik behandelt.

d) Zerlegung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wie man aus zwei bezw. drei gleichzeitigen Seitenbewegungen mit Hülfe der Gesetze vom Dreieck bezw. Viereck der Bewegungen die Mittelbewegung finden konnte, wie ferner die Seitengeschwindigkeiten und Beschleunigungen zu den Mittel-Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sich zusammensetzen liefsen, so kann auch umgekehrt jede Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene oder im Raum in zwei bezw. drei geradlinige Seitenbewegungen zerlegt oder durch diese ersetzt werden, und das Gleiche gilt auch bezüglich der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ist z. B. die Bewegung eines Massenpunktes in einer ebenen Kurve AB gegeben (Fig. 31), kennen wir also für jeden Zeitwert t den Ort P des Punktes in der Kurve, so kann man durch A zwei mit der Kurve in derselben Ebene liegende Gerade AC und AD legen und nach deren Richtungen die gegebene Bewegung zerlegen. Sind PQ und PR parallel zu AC und AD, so kann die gegebene Bewegung AP vollständig

Fig. 31.

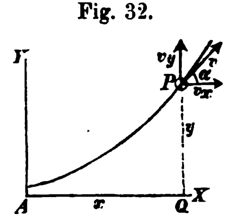


durch diese Seitenbewegungen ersetzt werden, sobald nur deren Bewegungsgesetze so geregelt sind, dafs für **jeden** Zeitpunkt t die Orte P, Q und R der fraglichen Bewegungen einem solchen Parallelogramm $AQPR$ angehören. Wird aus der Geschwindigkeit v der gegebenen Bewegung und den Seitenrichtungen AC und AD ein Dreieck gezeichnet, so sind die zu AC und AD parallelen Seiten zugleich die Geschwindigkeiten w und u der

Seitenbewegungen, oder es ist v in die Seitengeschwindigkeiten w und u zerlegt.

Für die Behandlung krummliniger Bewegungen bietet eine solche Zerlegung aufserordentliche Erleichterung; sie schliefst sich auch unmittelbar dem Verfahren der analytischen Geometrie an, welche ja auch einen Punkt P in einer Ebene durch zwei Koordinaten x und y gegen 2 Achsenrichtungen festlegt. In den meisten Fällen legt man die Achsen rechtwinklig zueinander.

Fig. 32.



Soll die Bewegung des Punktes P (Fig. 32) in der xy-Ebene völlig bekannt sein, so mufs man für jeden Zeitpunkt t sowohl x als auch y kennen, oder es müssen x und y als Funktionen von t gegeben sein. Jede der Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ kann aber für sich allein als das Gesetz einer geradlinigen Seitenbewegung aufgefafst werden, und zwar würden für den Zeitpunkt t die Seitenbewegungen $AQ = x$ und $PQ = y$ sein, deren Vereinigung den Massenpunkt richtig nach seinem Orte P führt. Diese beiden Bewegungsgleichungen bestimmen die Bewegung des Massenpunktes vollständig und in einfachster Weise. Bezeichnet man die Seitengeschwindigkeiten in den beiden Achsenrichtungen mit v_x und v_y, ebenso die Seitenbeschleunigungen mit p_x und p_y, so ist nach S. 6

$v_x = \frac{dy}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$. Für die wahre Geschwindigkeit gilt dann

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt},$$

also, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{ds}{dt}$. Ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx},$$

d. h. die Richtung der Geschwindigkeit v stimmt mit der Richtung der Bewegung überein.

Nach S. 15 ist

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\; p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};$$

für die wahre Beschleunigung gilt

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Da dieser Wert im allgemeinen von $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ verschieden ist, so fallen, wie bereits S. 25 besprochen, die Richtungen der Beschleunigung und der Bewegung im allgemeinen nicht zusammen.

Erfolgt die Bewegung des Massenpunktes nicht in einer Ebene, sondern in einer räumlichen Kurve, so sind die drei rechtwinkligen Koordinaten des Ortes P als Funktionen der Zeit auszudrücken, und es können dann wieder die Gleichungen $x = f(t)$; $y = \varphi(t)$; $z = \psi(t)$ als Gesetze dreier Seitenbewegungen aufgefaßt werden, deren Zusammenwirken die räumliche Bewegung des Massenpunktes vollständig wiedergibt. Es entsteht in ähnlicher Weise

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{ds}{dt};$$

ferner nach S. 23

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{dz}{ds};$$

Für die Beschleunigungen ergibt sich das Entsprechende.

Beispiel: Für eine ebene Bewegung sind gegeben die Gleichungen

$$x = a(1 - \cos t); \quad y = b \sin t.$$

Um hieraus die Gleichung der Bahnlinie zu finden, entferne man t. Es wird

$$\cos t = \frac{a - x}{a}; \quad \sin t = \frac{y}{b},$$

mithin durch Quadrieren und Zusammenzählen:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = \frac{(a - x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Fig. 33.

Dies ist die Gleichung einer Ellipse (Fig. 33), aber nicht bezogen auf den Mittelpunkt M, sondern auf den Endpunkt A der Halbachse a. Denn sobald man $a - x = x_1$ setzt, wird aus obiger Gleichung die bekannte Formel $1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Die Seitengeschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \sin t = \frac{a}{b} y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b \cos t = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Für $t = 0$ ist $x = y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = b$ (entsprechend dem Punkte A); für $t = \frac{1}{2}\pi = 1{,}57$ Sek. ist $\sin t = 1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = b$; $v_x = a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte B;

für $t = \pi = 3{,}14$ Sek. ist $\sin t = 0$, $\cos t = -1$,

$x = 2a$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = -b$, entsprechend dem Punkte C;

für $t = \frac{3}{2}\pi$ ist $\sin t = -1$, $\cos t = 0$.

$x = a$; $y = -b$; $v_x = -a$; $v_y = 0$; entsprechend dem Punkte D.

Für fortlaufende Zeit nehmen x und y immer wieder dieselben Werte an, so oft sich t um 2π geändert hat. Die Ellipse wird hiernach fortwährend in derselben Richtung durchlaufen, und ein Umlauf erfordert 2π Sekunden. Für die Beschleunigungen gilt

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \cos t = a - x = x_1$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = -b \sin t = -y.$$

Die Seitenbeschleunigungen werden also der Gröfse nach gemessen durch die Mittelpunkts-Koordinaten des Punktes P; u. zw. ist $p_x = a - x = x_1$ nach rechts, $p_y = -y$ aber, wegen des negativen Zeichens, nach unten gerichtet. Es wird

$$p = \sqrt{(a - x)^2 + y^2} = r = \text{dem Mittelpunkts-Fahrstrahle } PM,$$

u. zw. ist der Sinn von p stets nach dem Mittelpunkte M gerichtet.

4. Physikalische Grundgesetze der Mechanik.

In dem vorstehenden haben wir die Bewegungen als gegeben angesehen und gewisse kennzeichnende Merkmale und Eigenschaften derselben aufgeführt. Die Betrachtungen waren rein mathematische; wenn auch das Bewegliche als Massenpunkt bezeichnet wurde, so geschah dies nur zur Erleichterung der Vorstellung.

Wollen wir nun aber die Bewegung eines Massenpunktes aus ihren Ursachen, den Kräften herleiten, so bedürfen wir gewisser physikalischer Grundgesetze, die sich nicht mathematisch beweisen lassen, die auch nicht ohne weiteres selbstverständlich sind, deren Richtigkeit aber dadurch genügend sichergestellt ist, dafs alle Ergebnisse, welche daraus gezogen werden, mit der Beobachtung übereinstimmen (Erfahrungsgesetze).

Der erste Grundsatz ist das von Galilei im Jahre 1638 ausgesprochene Gesetz der Trägheit: Jeder Massenpunkt bleibt im Zustande der Ruhe oder der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung, solange er nicht durch äufsere Einwirkungen zu einer Änderung dieses Zustandes veranlafst wird.

Hiernach bedarf ein Massenpunkt zur Fortsetzung einer Bewegung mit gleichbleibender Richtung und Geschwindigkeit keiner äufseren Einwirkung. Zu einer Abweichung aber von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung ist eine Ursache, eine Kraft erforderlich. Eine solche Kraftwirkung, der ein Massenpunkt ausgesetzt ist, geht aber, so lehrt die Erfahrung, stets wieder von einem anderen Massenpunkt aus; man kann daher sagen: Unter „Kraft“ versteht man die Einwirkung eines Massenpunktes auf die Bewegung eines anderen. — Die Wirkung einer Kraft besteht in einer Gröfsen- oder Richtungs-Änderung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes.

Eine nach Gröfse und Richtung gleichbleibende Beschleunigung, wie sie bei der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung eines Massenpunktes vorkommt, wird als die Wirkung einer ebenfalls nach Gröfse und Richtung gleichbleibenden Kraft angesehen. Richtung und Sinn der Kraft werden als übereinstimmend mit denen der entsprechenden Beschleunigung bezeichnet. Derjenige Massenpunkt aber, von dem die Kraftwirkung ausgeht, ist auf der Richtungslinie der Kraft zu suchen.

Wenn auf denselben Massenpunkt zu verschiedenen Zeiten zwei Kräfte K und K_1 wirken und die Beschleunigungen p bezw. p_1 hervorbringen, so bezeichnet man die Gröfsen der Kräfte als verhältnisgleich mit den Beschleunigungen, setzt also $\frac{K}{K_1} = \frac{p}{p_1}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{K}{K_1}$. Wenn aber die gleiche Kraftwirkung, auf verschiedene Massenpunkte ausgeübt, die verschiedenen Beschleunigungen p und p_1 hervorbringt, so erklärt man diese abweichende Wirkung aus der verschiedenen Massengröfse der beiden Punkte, und zwar bezeichnet man diejenige Masse als die gröfsere, welche durch die gegebene Kraft die kleinere Beschleunigung erfährt,

und setzt die Massen m und m_1 in umgekehrtes Verhältnis zu den entstehenden Beschleunigungen p und p_1, also $\frac{m}{m_1} = \frac{p_1}{p}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{m_1}{m}$. Die Masse eines Körpers ist völlig unveränderlich, wird sogar durch chemische Umwandlung in keiner Weise beeinflufst. Die Beschleunigung aber, die ein Massenpunkt erfährt, ist, wie die Erfahrung lehrt, nur von ihrer Ursache, der Kraftgröfse, und von der Masse des Punktes abhängig. Da nun nach dem vorstehenden die Beschleunigung einmal in gleichem Verhältnisse zu der Kraft, ein anderes Mal im umgekehrten Verhältnisse zu der Masse steht, so gelangt man zu dem zweiten Grundgesetze, dem Beschleunigungsgesetze: Jede Kraft K, die auf einen Punkt von der Masse m wirkt, erteilt diesem eine Beschleunigung p, welche verhältnisgleich der Kraft und umgekehrt verhältnisgleich der Masse ist.

Man kann hiernach setzen $p = a \cdot \frac{K}{m}$. Darin bedeutet a eine Zahl, die sich offenbar nach den für Beschleunigung, Kraft und Masse gewählten Einheiten richtet. Umgekehrt kann man aber auch den Wert a willkürlich annehmen, wenn man zugleich auf die freie Wahl einer der drei Einheiten, z. B. der Masseneinheit, verzichtet. Man hat es nun zweckmäfsig gefunden, $a = 1$ zu setzen, so dafs einfach

$$1) \qquad p = \frac{K}{m},$$

Beschleunigung $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ sich ergibt. Dies Grundgesetz ist 1687 von Newton ausgesprochen.

Die Beschleunigung messen wir in der Regel nach $^{m}/_{sek^2}$; wenn später in einzelnen Fällen es zweckmäfsig wird, diese Gröfse in $^{cm}/_{sek^2}$ auszudrücken, so ergibt sich leicht, welche sonstige Änderung damit verbunden ist.

Wie man die Krafteinheit zweckmäfsig wählt und wie daraus dann die Masseneinheit sich von selbst ergibt (infolge der willkürlichen Setzung $a = 1$), kann erst mit Hülfe des folgenden Grundgesetzes erklärt werden.

Drittes Grundgesetz, Gesetz der Schwere: Die Erde übt auf jeden Massenpunkt an ihrer Oberfläche eine Kraft aus, welche lotrecht abwärts gerichtet ist und jedem Massenpunkte die gleiche Beschleunigung erteilt. Diese Kraft heifst die Schwerkraft oder das Gewicht des Massenpunktes, und die völlig gleiche Beschleunigung g heifst die Beschleunigung der Schwere oder die Fallbeschleunigung.

Ist also Q das Gewicht einer Masse m, so ergibt sich hiernach $g = Q : m$, oder — weil g für alle Massen gleich — es ist das Gewicht eines Massenpunktes seiner Masse verhältnisgleich und umgekehrt.

$$Q = mg. \tag{2}$$

Die Fallbeschleunigung g ist für verschiedene Punkte der Erdoberfläche allerdings etwas verschieden, aus Gründen, die später erläutert werden sollen; es ändert das aber an dem vorstehenden Gesetze nichts; denn dieses soll zunächst nur ausdrücken, dafs an derselben Stelle der Erdoberfläche verschiedene Massenpunkte übereinstimmende Fallbeschleunigung g erfahren, dafs die auf die Massen ausgeübten Schwerkräfte verhältnisgleich ihren Massen sind.

Unter 45° geographischer Breite und in der Höhe des Meeresspiegels beträgt die Fallbeschleunigung $g_{45} = 9{,}806\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}^2}$. In Berlin ist $g = 9{,}813$, in Hannover ebenfalls $= 9{,}813$ (S. 94).

Das Gewicht eines Liters Wasser im Zustande der gröfsten Dichte (bei etwa 4° C.) heifst das Kilogramm und dient als Gewichtseinheit. Da dieser Wasserkörper eine ganz bestimmte Masse enthält, so ist seine Schwere Q wegen der Veränderlichkeit von g an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche etwas verschieden. Das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4° C.) an denjenigen Stellen der Erde, wo $g = 9{,}806\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}^2}$ beträgt, wählen wir zur Krafteinheit und bezeichnen es als Kilogramm (kg). — An anderen Stellen der Erde wird das Gewicht eines Liters Wasser dann von 1 kg etwas verschieden ausfallen, sich nämlich verhältnisgleich mit g ändern. Für technische Anwendungen kann diese Veränderlichkeit meist unberücksichtigt bleiben, indem man für die meisten Fälle einfach $g = 9{,}81$ setzt. Nur grundsätzlich mufs die

Stelle der Erde bezeichnet werden, wo das Gewicht von 1 l Wasser gleich unserer technischen Krafteinheit, dem Kilogramm, ist.

Um nun die Masseneinheit kennen zu lernen, brauchen wir in der Gleichung $Q = mg_{45}$ nur $m = 1$ zu setzen, dann wird das Gewicht dieser Masseneinheit $Q_1 = g_{45} = 9{,}806$ kg.

Die Masseneinheit ist also die Masse eines Körpers, der unter 45° geographischer Breite 9,806 kg wiegt, oder die in 9,806 Litern Wasser von 4° C. enthaltene Masse.

Mafseinheiten der Physik. Da die Masse eines Körpers völlig unveränderlich ist, so liegt es eigentlich näher, einen Wasserkörper von abgerundeten Mafsen als Masseneinheit zu Grunde zu legen, wonach dann infolge der Gleichung 1 (S. 32) mit $K = 1$ und $m = 1$ auch $p = 1$ werden, d. h. diejenige Kraft zur Krafteinheit werden würde, welche der Masseneinheit eine Beschleunigung 1 erteilt. So bezeichnet die neuere Physik die Masse eines Kubikcentimeters Wasser als Masseneinheit und nennt diese Masseneinheit das Gramm. Als Längeneinheit dient das Centimeter, als Zeiteinheit die Sekunde, so dafs die Beschleunigung nach $^{cm}/_{sek^2}$ gemessen wird Die Krafteinheit der Physik, die Dyne, ist diejenige Kraft, welche einem Kubikcentimeter Wasser eine Beschleunigung $= 1\ ^{cm}/_{sek^2}$ erteilt. Das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser, d. h. $\frac{1}{1000}$ unserer Krafteinheit, erteilt diesem Körper die Beschleunigung $g = 981\ ^{cm}/_{sek^2}$, ist also gleich 981 Dynen; unsere Krafteinheit, das Kilogramm, daher gleich 981000 Dynen. Für die technische Anwendung der Mechanik ist die Wahl dieser Krafteinheit, wenngleich sie wissenschaftlich grofse Vorzüge besitzt, nicht recht zweckmäfsig. Bei den Aufgaben des Technikers kommt es meist darauf an, Schwerkräfte zu benutzen, oder ihnen entgegenzuwirken. Diese Schwerkräfte sind dann unmittelbar in Kilogrammen gegeben, und die Endergebnisse müssen für die Ausführung auch meist Gewichte oder sonstige Kräfte in Kilogrammen ausdrücken. Es würden daher bei den Aufgaben häufig Umwandlungen von Kilogrammen in Dyne und umgekehrt erforderlich werden. Ähnliche Umwandlungen müssen, streng genommen, freilich auch bei der Wahl unserer Krafteinheit ausgeführt werden, wenn die fraglichen Körper sich nicht unter 45° geographischer Breite befinden, sondern an einem Orte, wo g von 9,806 abweicht. Doch sind diese Abweichungen meist so gering, dafs sie für die Anwendung keine Bedeutung haben.

Viertes Grundgesetz: Gesetz der Wechselwirkung. Die Kräfte, mit denen zwei Massenpunkte aufeinander wirken, treten stets paarweise in gleicher Gröfse aber entgegengesetztem Sinn auf. Es wurde schon erwähnt (S. 31), dafs eine Kraft K, die auf einen Massenpunkt m wirkt, von irgend einem anderen, in der Richtungslinie der Kraft befindlichen

Massenpunkt m_1 ausgehen müsse. Die Erfahrung lehrt nun aber, dafs dann m auf m_1 dieselbe Kraft K, nur in entgegengesetztem Sinne (mit entgegengesetztem Pfeil), ausübt. Dies Gesetz wurde schon von Galilei (geb. 1564 zu Pisa, gest. 1642 zu Arcetri) und Huyghens (geb. 1629 im Haag, gest. 1695 daselbst) angewandt, ist aber erst von Newton (geb. 1643 zu Woolstorpe, gest. 1726 zu Kensington) im Jahre 1687 bestimmt ausgesprochen worden.

Beispiel 1: Der auf S. 13 behandelte Eisenbahnzug erfuhr bei der sog. Anfahrt eine Beschleunigung $p = 0{,}14\ ^{m}/_{sek^2}$. Wenn nun das Gewicht des ganzen Eisenbahnzuges $200\,000^{kg}$ beträgt, wie grofs ist dann die zur Beschleunigung erforderliche Kraft K? Die Masse des Zuges ist $m = 200\,000 : g$ Masseneinheiten, mithin ist $K = mp = 200\,000\,p : g$. Für solche Stellen der Erde, für welche $g = 9{,}81$ gesetzt werden kann, ist $^1/_g = 0{,}102$, mithin

$$K = 200\,000 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}102 = 2856\ \mathrm{kg}.$$

Setzt man annähernd $g = 10$, $^1/_g = 0{,}1$, was für überschlägliche Rechnungen zulässig, so wird $K = 2800^{kg}$.

Beispiel 2: Das auf S 16 behandelte Geschofs erfuhr eine Beschleunigung $p = 100\,000$. Wie grofs ist die Ausdehnungskraft der Pulvergase, wenn das Geschofs $20^g = 0{,}02^{kg}$ wiegt? Es ist $m = 0{,}02 : 9{,}81 = 2 : 981$, mithin $K = 2 \cdot 100\,000 : 981 = 204^{kg}$; für $g = 10$ wird $K = 200$.

5. Geradlinige Bewegung unter alleiniger Einwirkung der Schwere.

Hält man einen Punkt von der Masse m ruhend zwischen den Fingern, so wird die Schwerkraft durch die Muskelkraft der Finger aufgehoben, indem die Kraftwirkungen der Finger auf den Massenpunkt eine Gesamtkraft ausüben, welche dem Gewichte mg genau gleich und entgegengesetzt ist. Öffnet man aber die Finger der Hand nach unten, so kommt die Schwere zur alleinigen Wirkung und erteilt dem Massenpunkte die Beschleunigung g. Der Punkt hatte vorher keine Bewegung, d. h. die Geschwindigkeit $c = 0$; es entsteht nun eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Richtung der Schwere, also lotrecht abwärts. Nach t Sekunden ist die Geschwindigkeit im Punkte P (Fig. 34) nach Gl. 2, S. 11:

Fig. 34.

1) $$v = gt,$$

die zurückgelegte Wegeslänge

2) $$s = {}^1/_2\, g t^2 \quad \text{(nach Gl. 4, S. 12).}$$

Wenn man aus Gl. 1 $t = v : g$ entnimmt und in Gl. 2 einsetzt, so entsteht auch

3) $$s = \frac{g}{2}\,\frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2gs}.$$

Die lotrechte Wegeslänge, welche ein Massenpunkt durchfallen mufs, um ganz allein durch die Wirkung der Schwere die Geschwindigkeit v zu erreichen, d. h. den Wert $s = \frac{v^2}{2g}$ nennt man die der Geschwindigkeit v entsprechende Geschwindigkeitshöhe.

Für $g = 9{,}81$ wird

$$\frac{1}{2g} = 0{,}051 = \text{rund } 0{,}05 \text{ und } \sqrt{2g} = 4{,}429, = \text{rund } 4{,}4, \text{ mithin}$$
$$s = 0{,}05\,v^2; \quad v = 4{,}4\sqrt{s}.$$

Beispiel: Durchsinkt ein Massenpunkt in freiem Fall eine Höhe $s = 4^{\text{m}}$, so erreicht er eine Fallgeschwindigkeit $v = 4{,}4\sqrt{4} = 8{,}8\,^{\text{m}}/_{\text{sek}}$. Die dazu erforderliche Zeit ist

$$t = 8{,}8 : 9{,}81 = 8{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}88^{\text{ sek}}.$$

Bei der geradlinigen Bewegung stimmen die Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung überein, bei der krummlinigen aber nicht; mithin kann eine geradlinige Bewegung nur entstehen, wenn die Richtung der wirkenden Kraft mit derjenigen der Anfangsgeschwindigkeit übereinstimmt und sich während der Bewegung nicht ändert. Erteilt man also einem Massenpunkte mit der Hand eine derartige Bewegung, dafs er in dem Augenblicke, wo die Hand den Punkt freiläfst, eine Geschwindigkeit c hat, so ist diese die Anfangsgeschwindigkeit für die unter alleiniger Wirkung der Schwere erfolgende Wurfbewegung, und letztere kann nur geradlinig werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit c lotrecht gerichtet ist.

Ist c lotrecht nach unten gerichtet, so entsteht wiederum eine beschleunigte Bewegung; es wird (Fig. 34) nach t Sekunden

$$v = c + gt; \quad s = ct + {}^1/_2\,gt^2 = \frac{(v+c)}{2}\,t = \frac{v^2 - c^2}{2g},$$
$$\text{also auch} \quad v = \sqrt{c^2 + 2gs}.$$

Fig. 35.



Bei aufwärts gerichtetem Wurf aber (Fig. 35) entsteht eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Nach t Sekunden ist $v = c - gt$; $s = ct - {}^1/_2\,gt^2 = \frac{c^2 - v^2}{2g}$,

$$v = \sqrt{c^2 - 2gs}.$$

Nach $t_1 = c/g$ Sekunden ist die Geschwindigkeit c durch die Verzögerung aufgezehrt; es ist $v = 0$ und damit die gröfste mögliche Höhe, die Steighöhe $AB = h = \frac{c^2}{2g}$ erreicht. Die Steighöhe ist hiernach gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der Anfangsgeschwindigkeit c entspricht. Ist der Massenpunkt an der höchsten Stelle B (Fig. 35) mit der Geschwindigkeit Null angelangt, so geht er nun sofort in eine Fallbewegung über; die Geschwindigkeit v_1, mit der der Massenpunkt die Anfangsstelle A wieder erreicht, ist $v_1 = \sqrt{2gh}$ und weil $h = \frac{c^2}{2g}$ war, $v_1 = c$, mithin gleich der aufwärts gerichteten Anfangsgeschwindigkeit, nur jetzt abwärts gerichtet. Auch die Zeit des Niederfallens $t_2 = c/g$ ist gleich der Dauer $t_1 = c/g$ des Steigens; überhaupt erfolgen Abwärts- und Aufwärtsbewegung ganz symmetrisch zu der Höchstlage, insofern jeder Punkt P die Bahnlinie beim Fallen mit derselben Geschwindigkeit v durchlaufen wird wie beim Steigen.

Beispiel: Ein Massenpunkt werde mit der Geschwindigkeit $c = 9\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$ aufwärts geworfen. Dann ist die Steighöhe $h = c^2 : 2g = 81 \cdot 0{,}05 = 4{,}05\,^{\mathrm{m}}$; die Steigdauer $t_1 = c/g = 9 \cdot 0{,}1 = 0{,}9\,^{\mathrm{sek}}$. Ebensolange währt das Herabfallen; mit der Geschwindigkeit $c = 9\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$ trifft der Punkt unten wieder ein. — Wurfgeschwindigkeiten, die man einem Massenpunkt erteilt, lassen sich schwer unmittelbar abmessen oder beurteilen. Dazu kann aber ein aufwärts gerichteter Wurf dienen, indem man die Dauer der Steig- und Fallbewegung zusammen beobachtet. Nennt man diese t_3, so ist $t_3 = 2\,c/g$, mithin $c = \frac{1}{2}\,g\,t_3$.

Ein Massenpunkt werde lotrecht aufwärts geworfen und lange nach $t_3 = 6$ Sek. unten wieder an. Dann war seine Anfangsgeschwindigkeit $c = \frac{1}{2}\,g \cdot 6 =$ rund 30, die erreichte Höhe

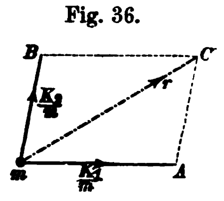
$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{4}\,\frac{g^2 t_3^2}{2g} = \frac{1}{8}\,g\,t_3^2 = 45\,^{\mathrm{m}}.$$

Bei all diesen Betrachtungen war vorausgesetzt, dafs auf den Massenpunkt nur die Schwere als Kraft wirke. Bei Fall- und Wurfbewegungen in freier Luft tritt aber ein Luftwiderstand der Bewegung entgegen, der an dieser Stelle noch nicht berücksichtigt werden kann. Es sei nur bemerkt, dafs dieser Widerstand unbedeutenden Einflufs hat bei Massenpunkten aus dichtem Stoff und bei kleinen Geschwindigkeiten. Wirft man eine Blei- oder Eisenkugel mit der Hand, so kann der Luftwiderstand meist vernachlässigt werden, während lockere Massen einen grofsen Luftwiderstand erfahren. Auch bei den grofsen Geschwindigkeiten der Geschosse hat der (mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsende) Luftwiderstand so bedeutenden Einflufs, dafs vorstehende einfache Gleichungen für solche Fälle durchaus nicht mehr verwendbar sind.

6. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

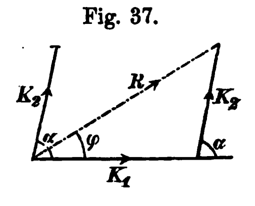
Auf einen Massenpunkt m (Fig. 36) mögen gleichzeitig 2 Kräfte K_1 und K_2 wirken; dann bringt nach dem Satz auf S. 32 jede von ihnen eine entsprechende Beschleunigung $p_1 = K_1 : m$; $p_2 = K_2 : m$ hervor. Denken wir uns diese Beschleunigungen, denen der Punkt m gleichzeitig unterworfen ist, durch mA und mB dargestellt, so lassen sich beide nach dem Satz auf S. 23 durch eine Mittelbeschleunigung r ersetzen, die man erhält, indem man die Seitenbeschleunigungen zu einem Streckenzug mAC zusammensetzt; die Schlufslinie mC ist dann die wahre oder Mittelbeschleunigung des Punktes m unter der Einwirkung der Kräfte K_1 und K_2. Dieselbe Beschleunigung r würde aber auch entstehen, wenn in der Richtung mC auf den Punkt m eine Kraft $R = mr$ wirkte. Zeichnet man daher einen Streckenzug aus den Kräften K_1 und K_2 (statt aus den Beschleunigungen), so wird die Schlufslinie die Gröfse $R = mr$ bekommen und nach Richtung und Sinn mit r übereinstimmen. Die so erhaltene Kraft R ist dann den gegebenen Kräften K_1 und K_2 völlig gleichwertig und heifst ihre Mittelkraft oder Resultierende. Es folgt also der Satz vom Dreieck (oder vom Parallelogramm) der Kräfte: Die Mittelkraft zweier gegebenen Kräfte wird nach Gröfse, Richtung und Sinn durch die Schlufsseite des aus den gegebenen Kräften gebildeten Streckenzuges, also durch die geometrische Summe der Seitenkräfte, (oder durch die Diagonale des aus ihnen gezeichneten Parallelogramms) dargestellt.

Fig. 36.



Für die Berechnung ergeben sich (Fig. 37), wie bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 21) gezeigt wurde, die Formeln:

Fig. 37.



$$1)\quad R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos\alpha}$$

$$2)\quad \sin\varphi = \sin\alpha \frac{K_2}{R}.$$

Wird $\alpha = 0$, d. h. haben die beiden Kräfte übereinstimmende Richtung und gleichen Sinn, so wird die Mittelkraft die wirkliche

Summe; haben sie aber (für $\alpha = \pi$) entgegengesetzten Sinn, so wird die Mittelkraft gleich dem Unterschiede der gegebenen Kräfte und bekommt den Sinn der gröſseren von beiden. In diesen beiden Fällen stimmt die geometrische Summe mit der algebraischen Summe überein. Werden in letzterem Falle noch die beiden entgegengesetzten Kräfte K einander gleich, so ergibt sich die Mittelkraft zu Null; es bewegt sich dann der Massenpunkt ebenso, als ob gar keine Kraft auf ihn einwirkte, man sagt daher:

Zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte heben sich an einem Massenpunkte vollständig auf oder halten einander das Gleichgewicht.

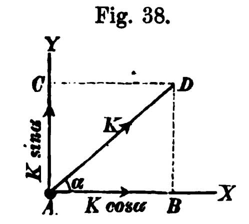
Stehen die beiden Kräfte rechtwinklig zueinander, so wird $R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = K_2 : K_1$.

Kommt zu den Kräften K_1 und K_2 noch eine dritte K_3 hinzu, die mit K_1 und K_2 nicht in derselben Ebene liegt, so hat man diese mit der Mittelkraft der beiden ersteren zusammenzusetzen, um die Mittelkraft R aller dreier Kräfte zu erhalten. Wie bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 22) ausführlich erläutert, ergibt sich dann die Mittelkraft als Diagonale eines Parallelepipeds aus den drei Seitenkräften, oder als die Schluſsseite eines räumlichen Streckenzuges der Seitenkräfte oder wiederum als deren geometrische Summe.

Wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen lassen sich selbstverständlich auch Kräfte in zwei bezw. drei Seitenkräfte zerlegen und durch diese völlig ersetzen.

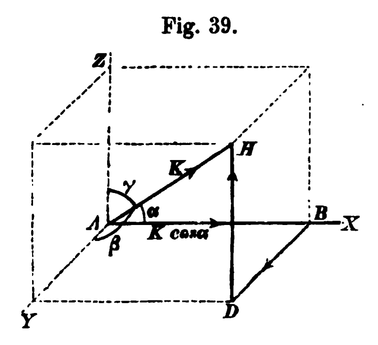
Soll eine Kraft K nach zwei rechtwinklig aufeinander stehenden, mit ihr in derselben Ebene liegenden Achsenrichtungen zerlegt werden (Fig. 38), so zieht man durch den Endpunkt D der Kraftstrecke AD eine Parallele DB zu AY; dann ist ABD der Streckenzug der Seitenkräfte. Schlieſst K mit der x-Achse den Winkel α ein, so erhält man $K \cos \alpha$ und $K \sin \alpha$ als die Seitenkräfte. Soll die Zerlegung aber nach drei rechtwinklig zueinander stehenden Richtungen erfolgen (Fig. 39), welche mit der Kraft K bezw. die Winkel α, β und γ einschlieſsen, so fällt man von H ein Lot HD auf die xy-Ebene und hat

Fig. 38.



damit die in die z-Achse fallende Seitenkraft $K \cos \gamma$ mit dem Sinne von D nach H. Eine Parallele durch D zur y-Achse liefert die Seitenkraft $BD = K \cos \beta$ für die y-Richtung, und endlich ist $AB = K \cos \alpha$ die Seitenkraft in der x-Richtung (vergl. S. 23, Fig. 25).

Fig. 39.



Greifen nun an einem Massenpunkte beliebig viele Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ mit beliebigen Richtungen an und will man deren Mittelkraft R nach Gröfse und Richtung finden, so legt man durch den Massenpunkt ein dreiachsiges Achsenkreuz, dessen Achsen mit den gegebenen Kräften die als bekannt zu betrachtenden Richtungswinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ einschliefsen. Sodann zerlegt man jede der gegebenen Kräfte in drei Seitenkräfte, welche mit den Achsenrichtungen zusammenfallen, ersetzt also K_1 durch $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$, $K_1 \cos \gamma_1$ u. s. f. Dadurch erhält man freilich die dreifache Anzahl der Kräfte, die aber nun in drei ganz bestimmten Richtungen liegen. Dann können die in die x-Richtung fallenden Seitenkräfte $K_1 \cos \alpha_1$, $K_2 \cos \alpha_2 \ldots K_n \cos \alpha_n$ durch eine einzige in derselben Richtung wirkende Kraft X gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte

$$3) \qquad X = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \ldots . K_n \cos \alpha_n,$$

was man kürzer schreibt $X = \Sigma K \cos \alpha$, ersetzt werden, während sich in den anderen Richtungen in gleicher Weise ergibt:

$$Y = \Sigma K \cos \beta; \quad Z = \Sigma K \cos \gamma.$$

Die drei rechtwinklig zueinander stehenden Seitenkräfte X, Y, Z lassen sich nun durch ihre geometrische Summe

$$4) \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ersetzen, welche mit den drei Achsenrichtungen die Winkel α, β und γ einschliefst. Da nun X die Seitenkraft von R in der x-Richtung, also $X = R \cos \alpha$, so wird

$$5) \qquad \cos \alpha = \frac{X}{R}; \text{ ebenso } \cos \beta = \frac{Y}{R}; \; \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Damit ist die Mittelkraft R nach Gröfse und Richtung bestimmt. Da in den algebraischen Summen auf die Reihenfolge der Summanden nichts ankommt, so ist die Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte gleichgültig.

Auch durch Zeichnung kann man beliebig viele, beispielsweise vier Kräfte K_1 bis K_4 zusammensetzen. Von einem beliebigen Punkt A aus setze man in einer Hülfsfigur 40a zuerst K_1 und K_2 zu einem Streckenzuge zusammen; dann ist die Schlufslinie $AC = R_2$ die Mittelkraft beider. Mit dieser fügt man in gleicher Weise K_3 zusammen, indem man den Streckenzug R_2, K_3 mit der Mittelkraft $R_3 = AD$ bildet. Daran schliefst sich in gleicher Weise K_4. Die Strecke AE, welche dann den gesamten Streckenzug der Kräfte K_1 bis K_4 schliefst, ist offenbar die Mittelkraft R der gegebenen Seitenkräfte und ergibt sich wiederum als die geometrische Summe der Kräfte. Verlegt man diese nach Gröfse, Richtung und Sinn bestimmte Mittelkraft an den Massenpunkt m bei P (Fig. 40), so ist die Aufgabe gelöst. Die Hülfsfigur 40a heifst (nach G. Lang), das Krafteck. Beim Zeichnen des Kraftecks hat man die zusammenzusetzenden Kräfte in solcher Weise aneinander zu reihen, dafs in dem Streckenzug $ABCDE$ die Pfeile übereinstimmenden Umfahrungssinn zeigen. — Diese Figur ist leicht zu zeichnen, wenn die gegebenen Kräfte in derselben Ebene, der Zeichenebene, liegen. Man erkennt aber leicht, dafs, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, das Krafteck grundsätzlich seine Bedeutung beibehält; nur bildet der Streckenzug der Kräfte dann ein räumliches Krafteck; aber immerhin stellt die Schlufslinie, d. h. die geometrische Summe der Kräfte, auch in solchen Fällen ihre Mittelkraft dar, deren zeichnerische Bestimmung dann freilich die Auftragung in Grundrifs und Aufrifs nach den Lehren der darstellenden Geometrie erfordert. Ist die Schlufslinie = Null, so halten sich die Kräfte im Gleichgewichte. Weiteres s. S. 65.

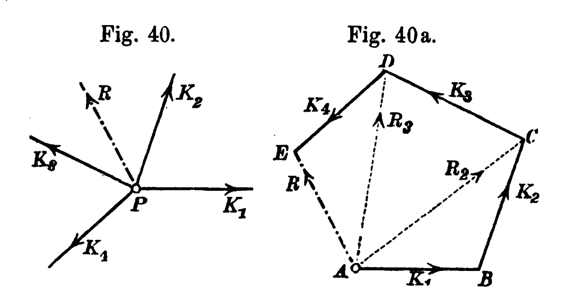
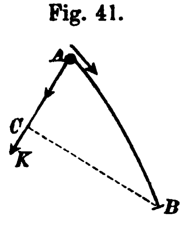


Fig. 40. Fig. 40a.

7. Mechanische Arbeit einer Kraft.

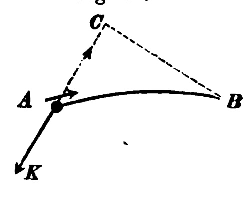
Ein Massenpunkt m führe unter Einwirkung beliebiger Kräfte eine Bewegung von A nach B aus (Fig. 41). Eine der wirkenden Kräfte K sei gleichbleibend nach Gröfse und Richtung, so dafs sie während der Bewegung stets ihrer Anfangsrichtung parallel bleibt. Ist dann AC die rechtwinklige Projektion der Bahnlinie AB auf die Richtung der Kraft K, so nennt man AC die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge. Das Produkt aus der Kraft K und der in ihrer Richtung zurückgelegten Wegeslänge AC heifst dann die während der Bewegung AB von der Kraft K verrichtete **mechanische Arbeit $\mathfrak{A}$.**

Fig. 41.



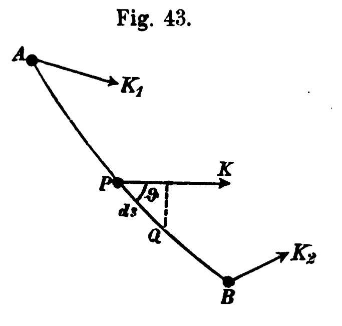
Die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge AC gilt als positiv, wenn ihr Sinn mit dem der Kraft übereinstimmt (Fig. 41) und umgekehrt. Bei dem Vorgange nach Fig. 42 ist AC negativ einzuführen und auch die Arbeit von K negativ, nämlich $\mathfrak{A} = -K \cdot AC$.

Fig. 42.



Ist die Kraft K nach Gröfse und Richtung nicht gleichbleibend, so ist die Bildung des Produktes $K \cdot AC$ nicht möglich. Wenn die Kraft bei A die Gröfse K_1, bei B die Gröfse K_2 hat, an einem beliebigen Zwischenpunkte P aber $= K$ war, so stellt man sich vor, die Kraft behielte für ein Bewegungsteilchen $PQ = ds$ Gröfse und Richtung bei und nähme erst bei Q plötzlich neue Gröfse und Richtung an. Diese Vorstellung der sprungweisen Änderung wird mit der wirklichen stetigen Änderung um so mehr übereinstimmen, je mehr das Bahnteilchen ds sich der Null nähert. Für das Bewegungsteilchen ist dann die Arbeit der Kraft K: $d\mathfrak{A} = K \cdot ds \cdot \cos\vartheta$. Als die Arbeit der veränderlichen Kraft K längs der endlichen Bewegung bezeichnet man nun $\mathfrak{A} = \int K \cdot ds \cdot \cos\vartheta$. Die Integration ist nur ausführbar, wenn man die Änderungsgesetze von K und $\cos\vartheta$ kennt.

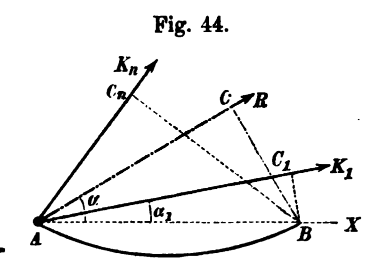
Fig. 43.



Steht die Kraft während eines beliebigen Teiles der Bewegung rechtwinklig zur Bahnlinie, so ist $\cos\vartheta = 0$, also auch $d\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ während dieses Bewegungsstückes Null; oder: eine Kraft verrichtet keine mechanische Arbeit, solange sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung steht.

Ein Massenpunkt möge sich nun unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte K_1, K_2 ... K_n bewegen, von denen in Fig. 44 nur 2 gezeichnet sind; während der Bewegung von A nach B seien die Kräfte gleichbleibend nach Gröfse und Richtung (welche Annahme auch für veränderliche Kräfte zulässig ist, sobald man für solchen Fall AB als unendlich klein betrachtet). Es sei R die Mittelkraft von K_1, K_2 ... K_n. Dann ist für diese (nach S. 40, Gl. 5)

Fig. 44.



1) $R\cos\alpha = X = \Sigma K\cos\alpha.$

Fällt man aber von B Rechtwinklige auf die Kraftrichtungen, so ist $\cos\alpha = AC:\overline{AB}$; $\cos\alpha_1 = AC:\overline{AB}$; ... $\cos\alpha_n = AC_n:\overline{AB}$; mithin wird aus Gl. 1 (nach Multiplikation mit $\overline{AB}$)

2) $R\cdot AC = K_1\cdot AC_1 + K_2\cdot AC_2 + \ldots K_n\cdot AC_n.$

Da aber AC, AC_1 ... AC_n die rechtwinkligen Projektionen der Bahnlinie AB auf die Kraftrichtungen sind, so ist die Bedeutung der Gl. 2:

Die mechanische Arbeit, welche sich bei der Bewegung eines Massenpunktes für die Mittelkraft mehrerer auf ihn wirkenden Kräfte ergibt, ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten dieser Einzelkräfte bei derselben Bewegung.

(Bei veränderlichen Kräften gilt dieser Satz zunächst für ein unendlich kleines Bewegungsteilchen; weil aber als Arbeit einer veränderlichen Kraft die Summe ihrer Arbeitsteilchen bezeichnet ist, so gilt der obige Satz der mechanischen Arbeit ganz allgemein für Kräfte, die an demselben Massenpunkt angreifen.)

Der Ausdruck für das Arbeitsteilchen $d\mathfrak{A} = K\cdot ds\cdot\cos\vartheta$ (S. 42) läfst sich jetzt auch noch anders deuten, als oben geschehen. Mann kann nämlich (Fig. 43) K zerlegen in die Seitenkräfte $K\cos\vartheta$ (in der Bewegungsrichtung) und $K\sin\vartheta$ (rechtwinklig dazu).

Erstere liefert die Arbeit $K \cdot \cos \vartheta \cdot ds$, während die andere nach S. 43 die Arbeit Null verrichtet. Die Arbeit von K ergibt sich daher wiederum zu $d\mathfrak{A} = K \cos \vartheta \cdot ds$.

Wird die Kraft $K = 1^{\text{kg}}$, die Wegeslänge in ihrer Richtung $= 1^{\text{m}}$, so wird die Arbeit $\mathfrak{A} = K \cdot s = 1 \cdot 1 = 1$, also gleich der Arbeitseinheit. Diese Arbeit, welche von 1^{kg} längs eines Weges $= 1^{\text{m}}$ verrichtet wird, heifst Meterkilogramm (mkg); n^{kg} längs eines Weges $= {}^1/_n$ Meter verrichten aber ebenfalls die Arbeit $n \cdot \frac{1}{n} = 1^{\text{mkg}}$.

8. Arbeitsvermögen (kinetische Energie oder lebendige Kraft) eines Massenpunktes.

1) Wirkt auf einen Punkt von der Masse m eine mit der Bewegungsrichtung übereinstimmende, nach Richtung und Gröfse gleichbleibende Kraft K, so entsteht eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Beschleunigung $p = K : m$. Ist c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach der Zeit t (Fig. 45), so ist die Wegeslänge (nach Gl. 5, S. 12)

Fig. 45.

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p} = \frac{v^2 - c^2}{2(K:m)}$$

oder

$$1) \qquad {}^1/_2\, mv^2 - {}^1/_2\, mc^2 = Ks.$$

Hat ein Punkt von der Masse m in irgend einem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit v, so nennt man das Produkt aus seiner Masse mal dem halben Quadrate der Geschwindigkeit, also die Gröfse ${}^1/_2\, mv^2$ das (in dem Massenpunkt aufgehäufte) **Arbeitsvermögen.** Älter und noch vielfach gebräuchlich ist dafür die Bezeichnung „lebendige Kraft“ (als *vis viva* von Leibniz [geb. 1646 zu Leipzig, gest. 1716 zu Hannover] in die Mechanik eingeführt); da aber der Wert ${}^1/_2\, mv^2$ mit dem, was wir sonst Kraft nennen, nichts gemein hat, da auch bei dem Fehlen jeder Kraftwirkung, also bei gleichbleibender Geschwindigkeit, der Wert ${}^1/_2\, mv^2$ bestehen bleibt, so erscheint die Benennung lebendige Kraft wenig zweckmäfsig. Die Bezeichnung „kinetische Energie“ ist als angemessen zu bezeichnen; auch der Name „Wucht“ ist dafür empfohlen; wir wollen diese Gröfse mit Franz Grashof (geb. am 11. Juli 1826 zu Düsseldorf, gest. am

30. Oktober 1893 zu Karlsruhe) das *Arbeitsvermögen* der Masse nennen. Es war $^1/_2\,mc^2$ das anfängliche, es ist $^1/_2\,mv^2$ das nachherige gröfsere Arbeitsvermögen. Die linke Seite der Gl. 1 ist also die „Zunahme an Arbeitsvermögen", welche der Massenpunkt durch die Kraft K erfahren hat. Die rechte Seite ist aber die mechanische Arbeit der Kraft K. Gl. 1 bedeutet hiernach:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens eines Massenpunktes ist gleich der während der Bewegung an dem Massenpunkte verrichteten mechanischen Arbeit.

Fig. 46.

Ist der Sinn der Kraft K der Bewegungsrichtung entgegengesetzt (Fig. 46), so entsteht eine verzögerte Bewegung; es ist dann (nach S. 12)

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2\,p} = -\frac{v^2 - c^2}{2\,(K:m)}, \text{ oder}$$

$$2) \qquad ^1/_2\,mv^2 - {}^1/_2\,mc^2 = -Ks.$$

In diesem Falle bewirkt die Kraft K eine Abnahme des Arbeitsvermögens, und zwar wird diese wiederum gemessen durch die von der Kraft geleistete Arbeit (im absoluten Sinne). Da aber die geleistete Arbeit jetzt als negativ aufzufassen ist, so empfiehlt es sich, für die allgemeine Anwendung dieses Satzes auch eine etwaige *Abnahme* des Arbeitsvermögens $^1/_2\,mc^2 - {}^1/_2\,mv^2$ stets in der Form einer algebraischen Zunahme (deren Wert hier negativ ist) zu schreiben, d. h. (Gl. 1 und 2) stets von dem Endwerte des Arbeitsvermögens den Anfangswert abzuziehen und den Unterschied gleich der verrichteten Arbeit zu setzen; dann entspricht eine positive Arbeit einer positiven Zunahme des Arbeitsvermögens, und umgekehrt.

Hatte ein Massenpunkt die Anfangsgeschwindigkeit Null, die Endgeschwindigkeit v, so ist (Gl. 1) $^1/_2\,mv^2 = Ks$, oder es drückt das Arbeitsvermögen einer Masse m diejenige Arbeit aus, welche verrichtet werden mufste, um den Punkt aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v zu versetzen. Soll aber die Geschwindigkeit c in Null verwandelt werden, so mufs stattfinden (Gl. 2)

$$0 = {}^1/_2\,mc^2 = -Ks.$$

$^1/_2\,mc^2$ ist also zugleich die absolute Gröfse der Verzögerungsarbeit, welche nötig ist, um eine Masse m von der Geschwindigkeit c zur Ruhe zu bringen. Will man einen Massenpunkt mit der

Geschwindigkeit c fortwerfen, so mufs man durch Muskelkraft eine Arbeit von der Gröfse $\frac{1}{2} mc^2$ auf ihn übertragen. Und dieses Arbeitsvermögen, welches der Massenpunkt in sich trägt, kann, wie wir später sehen werden, wieder zur Arbeitsverrichtung benutzt werden. Das Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} mc^2$ ist daher wirklich nur eine besondere Form von mechanischer Arbeit. Dafs $\frac{1}{2} mc^2$ auch nach Meterkilogrammen zu messen ist, erkennt man, wenn man mit der Fallbeschleunigung multipliziert und dividiert; dann wird

$$\frac{1}{2} mc^2 = mg \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Hierin ist mg eine Kraft, $c^2/2g$ aber eine Geschwindigkeitshöhe, d. h. eine Länge, so dafs das Produkt in ^{mkg} zu verstehen ist.

Der Satz vom Arbeitsvermögen ist besonders für solche Aufgaben geeignet, wo es wesentlich auf die Gröfse der Endgeschwindigkeit, nicht aber auf Beschleunigung und Zeit der Bewegung ankommt.

Beispiel: Der Fall der abwärts gerichteten Wurfbewegung (Fig. 34, S. 35) ist für die Anwendung des vorstehenden Satzes sehr geeignet. Ist die Strecke s durchfallen, so hat die Schwere die Arbeit $+ mg \cdot s$ verrichtet. Die Zunahme an Arbeitsvermögen ist daher

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mc^2 = mg \cdot s, \quad \text{mithin}$$

$$v^2 - c^2 = 2gs \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{c^2 + 2gs}.$$

Für die Aufwärtsbewegung (Fig. 35) ist die Arbeit negativ, nämlich $- mg \cdot s$, mithin

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mc^2 = - mg \cdot s$$

$$\text{oder} \quad v^2 - c^2 = - 2gs, \quad \text{mithin} \quad v = \sqrt{c^2 - 2gs}.$$

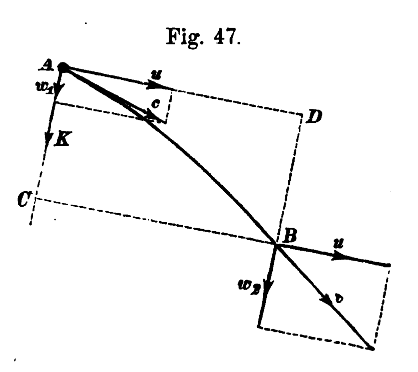
Fafst man die Bewegung vom Punkte P aus zur höchsten Stelle B und wieder zurück nach P zusammen, so ist die ganze Arbeit der Schwere Null, weil aufwärts $- mg \cdot s$, abwärts $+ mg \cdot s$ verrichtet wurde. Daher kann auch bei der Bewegung von P über B und nach P zurück keine Zunahme an Arbeitsvermögen entstehen, oder die Geschwindigkeit an einem beliebigen Punkte P mufs für Abwärts- und Aufwärtsbewegung die gleiche sein.

Ein Eisenbahnzug von 200000 kg Gewicht und 25 m/sek Geschw. hat das Arbeitsvermögen $\frac{200000 \cdot 25^2}{2g} = \frac{62500000}{g}$ mkg. — Das Geschofs einer grofsen Kanone hat bei 450 kg Gewicht und 527 m/sek Geschw. ungefähr dasselbe Arbeitsvermögen, nämlich $\frac{450 \cdot 527^2}{2g} = \frac{62489025}{g}$ mkg. — Die Zugkraft der Lokomotive hat in 180 Sek. längs eines Weges von 2250 m (nach S. 13) dieselbe Arbeit geleistet, die von der Ausdehnungskraft der Pulverladung in einem

kleinen Bruchteil einer Sekunde längs des Kanonenrohres verrichtet worden ist (wenn man in beiden Fällen nur diejenigen Teile der Kräfte beachtet, welche zur Beschleunigung dienen, d h wenn man die Reibungs- und Luftwiderstände nicht berücksichtigt).

2) Es soll nun der Satz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegung bewiesen werden. Ein Massenpunkt bewege sich unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft K, die aber nicht mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c zusammenfallen möge (Fig. 47); dann erteilt die Kraft dem Punkt eine Elementarbeschleunigung $p \cdot dt$ in der Richtung der Kraft. Anfangsgeschwindigkeit und Elementarbeschleunigung liegen in der durch die Richtungen von c und K bestimmten Ebene, daher müssen auch die ferneren Geschwindigkeiten in dieser Ebene verbleiben. Die unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft entstehende Bahnlinie ist demnach eine ebene Kurve. Daher kann man die Bewegung AB in zwei Seitenbewegungen AC (in der Richtung der Kraft K) und AD (rechtwinklig zur Kraft) zerlegen. Zerlegt man Geschwindigkeiten und Kraft nach denselben Richtungen, so erhält man die Seitengeschwindigkeiten und Seitenkräfte. In der Richtung AD wirkt keine Kraft; in dieser ist daher die Geschwindigkeit dauernd gleich u; in der Richtung AC aber vergröfsert sich die Geschwindigkeit von w_1 auf w_2. Für die Seitenbewegung $AC = s$ ist das Gesetz vom Arbeitsvermögen bereits bewiesen, daher

Fig. 47.



3) $$\frac{1}{2} m w_2^2 - \frac{1}{2} m w_1^2 = Ks.$$

Weil aber
$$v^2 = u^2 + w_2^2 \text{ und}$$
$$c^2 = u^2 + w_1^2,$$

so wird $v^2 - c^2 = w_2^2 - w_1^2$, so dafs man aus Gl. 1 erhält

4) $$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = Ks.$$

Ks ist auch für die krummlinige Bewegung AB die Arbeit von K, so dafs hiermit das Gesetz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegungen unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft nachgewiesen ist.

3) Wird nun der soeben betrachtete Fall noch verallgemeinert, indem man K als veränderlich annimmt, so kann man auf Grund der auf S. 42 gepflogenen Erörterungen behaupten, daſs während eines Bewegungsteilchens die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich dem Arbeitsteilchen, also $d\,(^1/_2\, mv^2) = d\mathfrak{A}$ sein muſs. Eine Summierung auf beiden Seiten ergibt dann auch für die endliche Bewegung $^1/_2\, mv^2 - {^1/_2}\, mc^2 = \mathfrak{A}$.

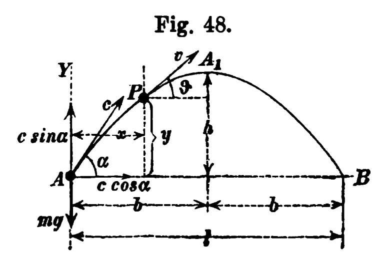
Steht der Massenpunkt unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte, so kann man diese für jeden Augenblick durch ihre Mittelkraft ersetzen, deren Arbeit dann gleich der Zunahme an Arbeitsvermögen sein muſs. Da aber nach S. 43 die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist, so hat man nun den Satz vom Arbeitsvermögen in der allgemeinen Form:

Die Zunahme an Arbeitsvermögen, welche ein Massenpunkt während einer Bewegung erfährt, ist gleich der algebraischen Summe der mechanischen Arbeiten, welche von allen auf den Punkt wirkenden Kräften während dieser Bewegung verrichtet werden.

9. Parabolische Wurfbewegung.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit c schräg aufwärts geworfen unter dem Neigungswinkel α gegen die Wagerechte und der alleinigen Einwirkung der Schwere überlassen, so entsteht, wie bei Fig. 47 erläutert, eine krummlinige Bewegung in einer durch c und die lotrechte Richtung der Schwere bestimmten Ebene.

Fig. 48.



Zerlegt man (Fig. 48) die krummlinige Bewegung in zwei Seitenbewegungen nach der Richtung der Lotrechten AY und rechtwinklig dazu nach AB, so muſs die letztere offenbar gleichförmig sein, weil in ihr keine Kraft auftritt. Sie erfolgt demnach mit der Geschwindigkeit $c \cos \alpha$, welche sich durch Zerlegung von c ergibt. Es ist mithin

1) $$v_x = c \cos \alpha \text{ und } v_y = c \sin \alpha - gt,$$

da die lotrechte Seitenbewegung wegen der Fallbeschleunigung

gleichförmig verzögert wird. Die Neigung von v gegen die Wagerechte ist

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g t}{c \cos \alpha}.$$

Die Wegeslängen in beiden Seitenbewegungen sind

$$x = c \cos \alpha t \text{ und } y = c \sin \alpha t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Entfernt man t aus diesen beiden Gleichungen, indem man $t = \frac{x}{c \cos \alpha}$ aus der ersten in die zweite einführt, so entsteht als Gleichung der Bahnlinie

$$2) \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha},$$

welche nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie als Parabel erkannt wird.

Da die lotrechte Seitenbewegung aufwärts und abwärts ganz symmetrisch, die wagerechte aber gleichförmig erfolgt, so schließt man leicht, daß der ansteigende Teil der Bahnlinie dem abfallenden Teile symmetrisch sein muß, daß also eine Lotrechte durch den höchsten Punkt A_1 der Bahnlinie die Hauptachse der Parabel sein muß. Bestimmter überzeugt man sich davon noch, indem man die Kurve auf ein durch A_1 gelegtes Achsenkreuz (wagerecht und lotrecht) bezieht. Die Höhe des höchsten Punktes A_1 ist offenbar

$$3) \qquad h = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2 g},$$

da in der lotrechten Seitenbewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \sin \alpha$ nur diese Höhe erstiegen werden kann. Die dazu gehörige Zeit, nach welcher $v_y = c \sin \alpha - g t = 0$ wird, ist $t_1 = \frac{c \sin \alpha}{g}$, und während dieser erfolgt eine wagerechte Seitenbewegung

$$4) \qquad b = v_x t_1 = c \cos \alpha \cdot \frac{c \sin \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Hierdurch liegt der höchste Punkt A_1 fest. Setzt man nun

$$x = b - x_1 = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - x_1 \text{ und}$$

$$y = h - y_1 = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2 g} - y_1 \text{ in Gl. 2 ein,}$$

so ergibt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$x_1^2 = 2\frac{(c\cos\alpha)^2}{g}y_1. \tag{5}$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel mit lotrechter Achse und dem Scheitel A_1 dar, und zwar ist der Parameter $\frac{c^2\cos^2\alpha}{g}$; es ist demnach diese Gröfse, welche die Form der Bahnlinie allein bedingt, nur von der **wagerechten** Seitengeschwindigkeit $c\cos\alpha$, nicht aber von der lotrechten anfänglichen Seitengeschwindigkeit $c\sin\alpha$ abhängig. Letztere bestimmt aber, weil sie in den Gleichungen 3 und 4 vorkommt, die Lage des Scheitelpunktes A_1 der Wurflinie gegen den Anfangspunkt A.

Besondere Fälle: 1) Ist $\alpha = 0$, wird der Punkt also wagerecht fortgeworfen (Fig. 49), so ist $c\cos\alpha = c$, $c\sin\alpha = 0$, daher werden h und b beide zu Null, und der Anfangspunkt A ist gleichzeitig der höchste Punkt A_1. Der Parameter der Parabel wird $c^2 : g$.

Fig. 49.

2) Erfolgt aber der Wurf schräg **abwärts** (Fig. 50), so wird $c\sin\alpha$, den früheren Betrachtungen gegenüber, negativ; es ist dann

$$b = -\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}; \quad h = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g};$$

mithin liegt dann der Scheitel A_1 in der nach rückwärts verlängerten Bahnlinie, wird also von dem Massenpunkte, der seine Bewegung in A beginnt, nicht mehr durchlaufen.

Fig. 50.

Der zuerst betrachtete Fall (Fig. 48) ist offenbar der vollständigere, da in ihm die abwärts gerichtete Bewegung mit vorkommt.

Die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte P der Bahnlinie ergibt sich am einfachsten nach dem Satze vom Arbeitsvermögen. Während der Bewegung von A nach P verrichtet nämlich die Schwerkraft die Arbeit $-mgy$, daher wird nach Gl. 4, S. 47

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}.$$

Solange der Punkt steigt, solange also y wächst, vermindert sich die Geschwindigkeit, und im Scheitel ist sie am kleinsten, indem

sie dort lediglich aus der wagerechten Seitenbewegung $c \cos \alpha$ besteht. Ist der Scheitel überschritten, sinkt der Massenpunkt, so nimmt v fortgesetzt wieder zu,ist im Punk te B für $y = 0$ wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit c und wird dann immer gröfser. Die Entfernung $AB = l$, in welcher der Massenpunkt wieder dieselbe wagerechte Ebene erreicht, von der er ausging, heifst die Wurfweite und ist offenbar $= 2b = \frac{c^2\, 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ oder

6) $$l = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Die Dauer t_2 dieses Wurfes beträgt, da $l = c \cos \alpha \, t_2$ ist,

7) $$t_2 = 2 t_1 = \frac{2 c \sin \alpha}{g}.$$

2) Bei einer Wurf-, Schiefs- oder Schleudervorrichtung ist die Geschwindigkeit c, welche dem Massenpunkt erteilt wird, meist gegeben, der Winkel α aber beliebig wählbar. Will man eine bestimmte Wurfweite l erreichen, so zeigt Gleichung 6, dafs diese mit $\sin 2\alpha$ verhältnisgleich ist. Es haben aber zwei Winkel, die sich zu 180^0 ergänzen, die man etwa $90 + \varphi$ und $90 - \varphi$ nennen kann, gleichen Sinus; jeder von beiden liefert daher, gleich 2α gesetzt, den gleichen Wert von $\sin 2\alpha$. Sonach geben 2 Steigungswinkel α, welche sich zu 90^0 ergänzen und welche man $45^0 + \frac{1}{2}\varphi$ und $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ nennen kann, dieselbe Wurfweite. Bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten c läfst sich also ein gegebenes Ziel sowohl durch einen hohen, wie durch einen flachen Wurf erreichen. Beide fallen aber zu einem einzigen zusammen für $\alpha = 45^0$, und dieser Steigungswinkel liefert den Gröfstwert der Wurfweite, nämlich

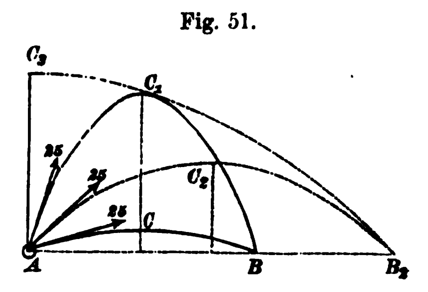
8) $$l_{max} = \frac{c^2}{g}.$$

Die gröfste erreichbare Höhe entsteht bei $\alpha = 90^0$ und wird $h_{max} = \frac{c^2}{2g}$; die mit einer Geschwindigkeit c erreichbare gröfste Wurfweite ist mithin doppelt so grofs wie die gröfste erreichbare Wurfhöhe.

Bei $\alpha = 45^0$ wird (nach Gl. 3) $h = \frac{c^2}{4g}$, d. h. die Pfeilhöhe dieser Wurflinie beträgt $\frac{1}{4}$ der Wurfweite (der Sehne).

Beispiel 1: Eine gespannte Armbrust (eine geladene Windbüchse, ein Blasrohr oder dergl.) erteile dem Geschofs eine Geschwindigkeit $c = 25\,^{m}/_{sek}$. Mit welchem Steigungswinkel ist eine Wurfweite von $l = 40^{m}$ zu erreichen? (Fig. 51.) Nach Gl. 6 ist $40 = \frac{25^2 \sin 2\alpha}{9{,}81}$, mithin sind $2\alpha = 0{,}628$; diesem entspricht ein Winkel $2\alpha = 39^{0}$, zugleich aber auch $2\alpha = 141^{0}$. Also sind die beiden Steigungswinkel $\alpha = 19{,}5^{0}$ und $70{,}5^{0}$ verwendbar. Dann ist $\sin\alpha = 0{,}334$ bezw. $0{,}943$, sonach beträgt $c \sin\alpha = 8{,}4$ bezw. $23{,}6$ und die Wurfhöhe nach Gl 3: $h = 3{,}5$ bezw. $28{,}3^{m}$, die Wurfdauer aber (Gl. 7): $t_2 = 1{,}7$ bezw. $4{,}81$ Sekunden. Die gröfste erreichbare Höhe bei $\alpha = 90^{0}$ beträgt $c^2 : (2g) = 31{,}9^{m}$, die gröfste mögliche Wurfweite bei $\alpha = 45^{0}$: doppelt soviel, nämlich $63{,}8^{m} = AB_2$.

Fig. 51.



Soll ein Ziel getroffen werden, welches nicht in gleicher Höhe mit A liegt, sondern die Koordinaten x und y hat, so findet man den erforderlichen Steigungswinkel, indem man Gl. 2 nach α auflöst. Führt man zur Abkürzung die Geschwindigkeitshöhe $k = \frac{c^2}{2g}$ ein, so wird Gl. 2: $y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{x^2}{4k\cos^2\alpha}$; bedenkt man, dafs $1 : \cos^2\alpha = \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, so ergibt sich leicht

$$10)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2k}{x} \pm \sqrt{\frac{4k(k-y)}{x^2} - 1}\,.$$

Bei gegebenem k, d. h. gegebener Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses gibt es bezüglich der Punkte, die für das Geschofs erreichbar sind, eine bestimmte Grenze. Für gewisse Wertpaare von x und y wird nämlich die Wurzel in Gl. 10 reell, für andere aber imaginär. Letztere Wertpaare entsprechen den unerreichbaren Punkten. Die Grenzlinie zwischen den erreichbaren und unerreichbaren Punkten erhält man, wenn die Gröfse unter dem Wurzelzeichen gleich Null gesetzt wird, d. h. $4k^2 - 4ky = x^2$ oder

$$11)\qquad y = k - \frac{x^2}{4k} = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2}x^2\,.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel in der Höhe $k = c^2 : (2g)$ lotrecht über dem Anfangspunkt A liegt, und deren halbe Sehne gleich der Wurfweite $l = 2k = c^2 : g$ ist. Sie ist in Fig. 51 durch die Strichpunktierte C_3B_2 dargestellt. Gibt man α alle möglichen Werte, so bezeichnet Gl. 2 (S. 49) eine Schar von unendlich vielen verschiedenen Wurfparabeln, die sämtlich von A ausgehen. Umschliefst man diese unendlich vielen für eine gespannte oder geladene Wurf- oder Schiefsvorrichtung möglichen Parabeln durch eine sie sämtlich berührende Kurve, so nennt man diese die Umhüllungslinie, und die Parabel C_3B_2 der Gl. 11 ist eben diese Umhüllungslinie.

Ihre Gleichung kann auch noch auf andere Weise, als eben geschehen, gefunden werden, indem man nach der Lehre von den Umhüllungslinien die Abgeleitete der Gleichung 2 (S. 49) der Kurvenschar nach dem für die Kurvenschar veränderlichen $\operatorname{tg} \alpha$ gleich Null setzt, diese Gleichung mit Gleichung 2 verbindet und aus beiden $\operatorname{tg} \alpha$ entfernt. Es wird Gleichung 2, wenn man darin $1 : \cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ setzt:

12) $$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2} - \frac{g x^2}{2 c^2} \operatorname{tg}^2 \alpha .$$

Mithin

13) $$\frac{d y}{d (\operatorname{tg} \alpha)} = 0 = x - \frac{g x^2}{c^2} \operatorname{tg} \alpha .$$

Hieraus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2}{g x}$ gibt, in Gleichung 12 eingesetzt:

$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g}{2 c^2} x^2 - \frac{c^2}{2 g} \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{c^2}{2 g} - \frac{g}{2 c^2} x^2, \quad \text{wie in Gleichung 11.}$$

Beispiel 2: Hat ein Eisenbahnwagen eine Geschwindigkeit u in gerader Bahnlinie, so nehmen alle Körper, die in demselben in scheinbarer Ruhe sich befinden, an der Geschwindigkeit u teil. Läfst man also in einem solchen Wagen einen Massenpunkt aus der ruhenden Hand fallen, so ist seine scheinbare Bewegung freilich eine lotrechte Fallbewegung, die wahre Bewegung aber eine parabolische Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit u beginnt. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man einen Massenpunkt aus dem Fenster eines Eisenbahnwagens fallen läfst. Ein aufserhalb des Zuges auf dem Erdboden befindlicher Beobachter erblickt in solchem Falle eine parabolische Bahnlinie nach Fig. 49, wenn darin c mit u vertauscht wird. Für $u = 20\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$ wird der Parameter der Parabel $20^2 : 9{,}81 = 400 \cdot 0{,}102 = 40{,}8\,\mathrm{m}$.

Erteilt man aber dem Massenpunkte, statt ihn aus der ruhenden Hand vom Eisenbahnwagen aus fallen zu lassen, mittels Wurfes eine wagerechte Geschwindigkeit $w = 10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$ rechtwinklig zur Fahrrichtung (Fig. 52, Grundrifs), so ist diese nur eine Seitengeschwindigkeit; die wahre Geschwindigkeit v aber in Bezug auf den festen Erdboden ist die Mittelgeschwindigkeit aus $w = 10$ und $u = 20$, mithin

$$v = \sqrt{w^2 + u^2} = 10 \sqrt{5} = 22{,}361 .$$

Fig. 52.

Für den aufsen stehenden Beobachter entsteht eine Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit $v = 10 \sqrt{5}$ beginnt und in der lotrechten Ebene durch v erfolgt. Würde der Beobachter von diesem Wurf etwa getroffen, so würde, wenn man nur die wagerechte Seitenbewegung berücksichtigt und die Vergröfserung der wahren Geschwindigkeit in schräger Richtung durch die Wirkung der Schwere aufser Acht läfst, die Wirkung des Wurfes nach dem Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2 \cdot 5$ zu

beurteilen sein. Der Werfende hat nur die Arbeit $^1/_2 m\ 10^2$ auf den Massenpunkt übertragen; die durch die Kraft der Lokomotive erzeugte Zuggeschwindigkeit hat aber zur Folge, dafs das Arbeitsvermögen (oder die Gewalt, die Wucht) des Wurfes auf das 5fache gewachsen ist. Die aufgewendete Wurfgeschwindigkeit w entsprach nur einer Fallhöhe $w^2 : 2g = 5{,}1$ m, während die Wirkung dieselbe ist, als fiele der Punkt aus der Höhe $5 \cdot 5{,}1 = 25{,}5$ m. Hiernach kann man beurteilen, wie gefährlich das Hinauswerfen fester Körper aus fahrenden Eisenbahnzügen werden kann.

Bei den bisherigen Untersuchungen über Fall- und Wurfbewegungen wurde vorausgesetzt, dafs auf den Massenpunkt allein die Schwere einwirke. Auf S. 37 wurde aber schon bemerkt, dafs bei Körpern von verhältnismäfsig grofsem Rauminhalt und bei grofsen Geschwindigkeiten der Luftwiderstand eine bedeutende Rolle spielt. Es sei hier nur bemerkt, dafs ein Gewehrgeschofs schon bei etwa 50 m/sek Geschwindigkeit einen Luftwiderstand erfährt, der gleich dem Gewichte des Geschosses ist, so dafs ein mit dieser Geschwindigkeit abwärts geworfenes Geschofs sich gleichförmig bewegen würde, da der Luftwiderstand die Schwere aufhebt. Weil der Luftwiderstand aber etwa verhältnisgleich dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, so wird er bei einer Schufsgeschwindigkeit von 400 m/sek das 64fache des Gewichts betragen. Hieraus ergibt sich klar, dafs die Bewegung eines solchen Geschosses mit den hier entwickelten Formeln wenig Ähnlichkeit haben wird. Aus diesem Grunde haben wir auch in dem Beispiel auf S. 52 nicht ein Gewehrgeschofs, sondern ein Geschofs mit geringerer Geschwindigkeit der Rechnung unterzogen.

Ferner wurde bisher die Fallbeschleunigung als gleichbleibend nach Gröfse und Richtung vorausgesetzt. Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Fallbeschleunigung mit der Veränderung des Ortes ändert, woraus sich dann freilich zeigen wird, dafs dieser Einflufs bei den vorkommenden Fällen der Wurfbewegung verschwindend klein ist.

10. Gesetz der allgemeinen Massenanziehung.

Das Gesetz der Schwere (S. 33) ist nur ein besonderer Fall des Gesetzes der allgemeinen Massenanziehung, welches von Newton 1685 aufgestellt wurde. Dasselbe lautet:

Je 2 Massenpunkte m und m_1, die sich in der Entfernung l voneinander befinden, üben aufeinander eine gegenseitige Anziehungskraft aus, die proportional dem Produkte der Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist.

Fig. 53.

m →K← m_1

← l →

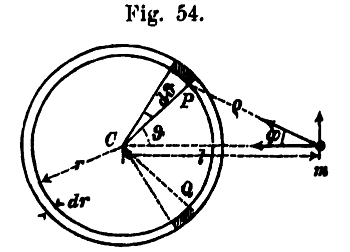
Es ist hiernach (Fig. 53)

$$1)\qquad K = k\frac{m\,m_1}{l^2},$$

worin k offenbar die Anziehungskraft zwischen 2 Masseneinheiten in dem Abstand $l = 1$ bedeutet. Für Kilogramme als Kräfte, für Meter und Sekunden ist $k = 0{,}000\,000\,000\,064 = \frac{64}{10^{11}}$.

Diese Formel 1 gilt einstweilen nur für Massenpunkte ohne räumliche Ausdehnung; wir wollen darnach feststellen, wie eine dünne gleichartige Kugelschale auf einen Massenpunkt einwirkt. Die Kugelschale (Fig. 54) habe den Halbmesser r, die Wandstärke dr; der Massenpunkt m sei vom Mittelpunkte der Kugel um l entfernt. Man ziehe einen Halbmesser CP, der mit Cm den Winkel ϑ einschliefst und ziehe in dem Abstande $d\vartheta$ einen zweiten Halbmesser. Beide lasse man sich um Cm als Achse drehen, dann schneiden sie aus der Hohlkugel eine kleine Zone heraus. Von der Umfangslänge der Zone denkt man sich bei P ein Bogenteilchen ds rechtwinklig zur Bildebene herausgenommen, dann hat man bei P ein Massenteilchen, welches nach allen drei Richtungen unendlich klein ist. Der Stoff der Hohlkugel habe für 1 cbm das Gewicht γ (unter 45° geographischer Breite gewogen). **Das Gewicht eines Kubikmeters in Kilogrammen** (unter 45° geogr. Br.) **nennen wir die Dichte** des Körpers. Das Körperteilchen hat dann die Masse $\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r d\vartheta\cdot ds$ und übt auf m die Anziehungskraft aus $k\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r\cdot d\vartheta\cdot ds\cdot\frac{m}{\rho^2}$. Diese Kraft kann zerlegt werden in eine mit der Richtung mC und eine, welche im Punkte m rechtwinklig zu mC nach oben gerichtet ist. Die erstere beträgt

Fig. 54.



$$k\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r\cdot d\vartheta\cdot ds\cdot\frac{m}{\rho^2}\cos\varphi,$$

worauf die zweite durch die Einwirkung eines gleichen bei Q befindlichen Massenteilchens aufgehoben wird. Sämtliche Massenteilchen der Zone wirken in übereinstimmender Weise auf m ein, da für sie alle $d\vartheta$, ρ und φ dieselben sind. Wir können daher die Gesamtanziehung der ganzen Kugelzone erhalten, wenn wir statt ds den Umfang $2\pi r\sin\vartheta$ einsetzen. Dann entsteht die Anziehung

$$dK = k\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot dr\cdot r\cdot d\vartheta\cdot 2\pi r\cdot\sin\vartheta\cdot\frac{m}{\rho^2}\cdot\cos\varphi.$$

Nun ist aber die Masse der ganzen Hohlkugel $M = \frac{\gamma}{g}4r^2\pi\cdot dr$; wird dies in dK eingeführt, so entsteht

$$1)\qquad dK = \frac{kMm}{2}\,\frac{\sin\vartheta\cdot d\vartheta\cdot\cos\varphi}{\rho^2}.$$

Die Veränderlichen ϑ und φ sollen auf ρ zurückgeführt werden. Es ist nämlich in dem Dreiecke CPm: $r^2 = l^2 + \rho^2 - 2l\rho\cos\varphi$ mithin $\cos\varphi = \frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2l\rho}$; ebenso $\cos\vartheta = \frac{l^2 + r^2 - \rho^2}{2lr}$ und durch Differentiation $-\sin\vartheta \cdot d\vartheta = -\frac{\rho \cdot d\rho}{lr}$. Hiernach wird

$$2)\qquad dK = \frac{kMm}{2}\,\frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2l^2 r \rho^2}\,d\rho = \frac{kMm}{4rl^2}\,\frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{\rho^2}\,d\rho.$$

Um nun die Anziehungskraft K der ganzen Hohlkugel zu erhalten, mufs man vorstehenden Ausdruck integrieren. Liegt der Punkt m aufserhalb der Hohlkugel, so sind ihre nächsten Teile im Abstand $l-r$, die fernsten im Abstand $l+r$ vom Massenpunkte, so dafs diese Werte als Grenzen für ρ einzusetzen sind. Daher wird

$$K = \frac{kMm}{4rl^2}\int_{l-r}^{l+r}\left[(l^2 - r^2)\frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho\right].$$

Das unbestimmte Integral aber ist

$$3)\qquad \int\left[(l^2 - r^2)\frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho\right] = -\frac{l^2 - r^2}{\rho} + \rho.$$

Dies wird mit Rücksicht auf obige Grenzen

$$-\frac{l^2 - r^2}{l+r} + l + r + \frac{l^2 - r^2}{l-r} - (l-r) = -(l-r) + l + r + l + r - (l-r) = 4r,$$

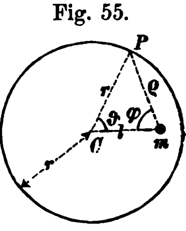
mithin wird

$$4)\qquad K = k\frac{Mm}{l^2}.$$

Diese Anziehungskraft ist (nach Gl. 1) dieselbe, als ob die Masse M der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Hieraus folgt weiter, dafs eine Hohlkugel von endlicher Wandstärke oder auch eine Vollkugel, die aus lauter gleichartigen Kugelschalen besteht, bezüglich der Anziehungskraft gegen einen aufserhalb befindlichen Massenpunkt ebenso wirkt, als ob die ganze Masse der Hohlkugel oder Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Dabei ist nicht erforderlich, dafs die verschiedenen Kugelschalen dieselbe Dichte haben, wenn nur jede Schale für sich gleichartig an Dichte ist. Auch für die gegenseitige Anziehungskraft zweier Kugeln ergibt sich leicht, dafs man die Masse einer jeden in ihrem Mittelpunkte vereinigt ansehen kann.

Liegt der Massenpunkt im Innern der Kugelschale (Fig. 55), so ergibt sich für die Anziehung einer Zone bei P dieselbe Gleichung 1, daher auch dieselbe Gleichung 2; nur sind jetzt die Grenzen $r+l$ und $r-l$ als gröfste und kleinste Entfernung des Massenpunktes von der Schale. Die Einsetzung dieser Grenzen in Gl. 3 gibt: $-\frac{l^2 - r^2}{r+l} + r + l + \frac{l^2 - r^2}{r-l} - (r-l)$ $= r - l + r + l - r - l - r + l = 0$, so dafs auch $K = 0$ wird. Die Anziehungskraft einer dünnen, gleichartigen

Fig. 55.



Kugelschale gegen einen in ihrem Inneren befindlichen Punkt ist also Null.

Die Anziehung einer aus gleichartigen dünnen Kugelschalen bestehenden Hohlkugel von endlicher Wandstärke auf einen in ihrem Hohlraume gelegenen Punkt ist demnach ebenfalls Null.

Betrachten wir nun die Erde als Kugel, aus unendlich vielen Schalen bestehend, von denen jede für sich gleichartig ist, so ist ihre Anziehungskraft für einen aufserhalb gelegenen Massenpunkt m ebenso zu berechnen, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Für einen Massenpunkt an der Erdoberfläche, d. h. in dem Abstand r (Erdhalbmesser) vom Mittelpunkt M ist nun die Anziehungskraft gleich mg, mithin

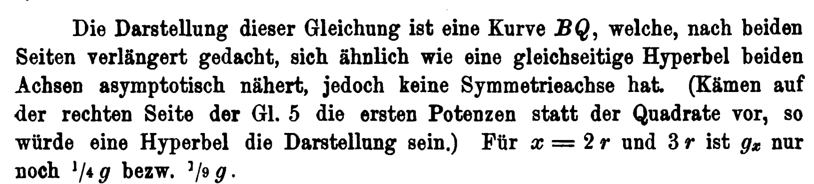
$$\frac{kMm}{r^2} = mg \quad \text{oder}$$

4) $$kM = gr^2.$$

Nennen wir aber die Anziehungsbeschleunigung (Fallbeschleunigung) eines in gröfserem Abstand x vom Erdmittelpunkte befindlichen Punktes g_x (Fig. 56), so wird auch

$$kM = g_x x^2, \quad \text{mithin}$$

Fig. 56.



5) $$g_x : g = r^2 : x^2.$$

Die Darstellung dieser Gleichung ist eine Kurve BQ, welche, nach beiden Seiten verlängert gedacht, sich ähnlich wie eine gleichseitige Hyperbel beiden Achsen asymptotisch nähert, jedoch keine Symmetrieachse hat. (Kämen auf der rechten Seite der Gl. 5 die ersten Potenzen statt der Quadrate vor, so würde eine Hyperbel die Darstellung sein.) Für $x = 2r$ und $3r$ ist g_x nur noch $\frac{1}{4}g$ bezw. $\frac{1}{9}g$.

Für die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung im Inneren der Erde wäre das Gesetz einfach, wenn man annehmen dürfte, dafs die Dichte der Erde überall gleich sei. Unter dieser Voraussetzung würde man für ein Massenteilchen im Abstand x von dem Mittelpunkte die Erde zerlegen in eine Vollkugel vom Halbmesser x und eine äufsere Hohlkugel von der Wandstärke $r - x$. Letztere würde keine Einwirkung ausüben, erstere aber ebenso wirken, als ob ihre Masse in der Mitte vereinigt wäre. Darnach wird nach Gl. 4:

$$kM_x = g_x x^2,$$

wenn M_x die Masse der Kugel vom Halbmesser x. Da nun für $x = r$ wiederum

$$kM = gr^2, \quad \text{so wird}$$

6) $$g_x = g\frac{r^2}{x^2}\frac{M_x}{M} \quad \text{oder, weil}$$

$M_x : M = x^3 : r^3$:

7) $$g_x = g\frac{x}{r},$$

dargestellt durch eine in Fig. 56 gezogene Gerade MB. Die Erde ist aber durchaus nicht von überall gleicher Dichte, vielmehr sind die tieferen Schichten bedeutend dichter als die uns bekannten, in der Nähe der Oberfläche gelegenen. Daher ist $M_x : M > x^3 : r^3$ und es wird $g_x > gx/r$. Statt der Geraden MB ist daher eine oberhalb derselben liegende Kurve MB der wahre Ausdruck des Gesetzes, welches wir aber nicht entwickeln können, da das Gesetz der Veränderlichkeit der Dichte nicht bekannt ist.

Nehmen wir nun an, dafs die dem Menschen zugänglichen oder auch durch Wurf zu erreichenden Höhen sich um höchstens 10000 m über die mittlere Erdoberfläche erheben, so würde, weil der mittlere Erdhalbmesser etwa 6370000 m beträgt, für diese Grenze $x = 6380000$ m betragen, daher nach Gl. 5:

$$g_x : g = 637^2 : 638^2 \text{ sein;}$$

dies ist etwa $= 1000 : 1003$, d. h. sehr wenig von der Einheit abweichend. Nennt man h die Höhe eines Punktes über der Meeresfläche, so ist nach Gl. 5 mit $x = r + h$:

$$\frac{g_x}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]^2} = \frac{1-2\frac{h}{r}+\left(\frac{h}{r}\right)^2}{1-2\left(\frac{h}{r}\right)^2+\left(\frac{h}{r}\right)^4}.$$

Wenn man dann $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ und $\left(\frac{h}{r}\right)^4$ gegen 1 vernachlässigt, so entsteht annähernd

8) $$g_x = g\left(1 - 2\frac{h}{r}\right).$$

Für die weitaus meisten technischen Anwendungen kann diese Veränderlichkeit von g_x mit der Höhe vernachlässigt werden.

Die Erde übt nun aber auch auf den Mond eine Anziehungskraft aus, und die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung g_x ergibt sich, da die Entfernung des Mondes von dem Erdmittelpunkt etwa 60 Erdhalbmesser ausmacht, zu

$$g_x = g\left(\frac{r}{60 \cdot r}\right)^2 = {}^1/_{3600}\, g = 9{,}81 : 3600 = 0{,}0027\,.$$

Hörte die Umlaufbewegung des Mondes um die Erde für einen Augenblick auf, so würde der Mond eine beschleunigte Fallbewegung

nach der Erde hin ausführen; die Beschleunigung würde anfänglich nur 0,0027 $^{m}/_{sek^2}$ betragen, würde aber mit der Annäherung an die Erde wachsen und sich allmählich dem Werte 9,81 nähern. Dafs diese Fallbewegung nicht zu stande kommt, rührt von der Geschwindigkeit des Mondes rechtwinklig zur Richtung der Anziehungskraft her, wie weiter unten noch besprochen werden wird.

Die Gl. 4 (S. 57) kann auch dazu dienen, die **Massenzahl M der Erde** zu bestimmen. Es ist $M = gr^2 : k$ also $M = 9{,}81 \cdot 6370000^2 \cdot 10^{11} : 64 = 622 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten. Die Erde hat etwa $1083 \cdot 10^{18}$ Kubikmeter Inhalt; bestände sie aus Wasser (von 4° C.), so würde ihr Massengehalt $1083 \cdot 10^{18} \cdot 1000 : 9{,}81 = 110 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten.

Mithin ist die Erde durchschnittlich $622 : 110 = 5{,}65$ mal dichter als Wasser.

Fallbeschleunigung an der Oberfläche anderer Himmelskörper. Die Gleichung 4, S. 57, für die Fallbeschleunigung g an der Erdoberfläche

$$g = Mk : r^2$$

gilt, ihrer Entwicklung nach, allgemein für die Zeitbeschleunigung an der Oberfläche eines beliebigen Himmelskörpers von der Masse M und dem Halbmesser r. Gehen M und r in M_1 und r_1 über, so wird

$$g_1 = M_1 k : r_1^2,$$

mithin ist das Verhältnis

$$\frac{g_1}{g} = \frac{M_1}{M} \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Ist die Masse der Sonne 327000 mal so grofs wie die der Erde, während die Halbmesser in dem Verhältnis 108 : 1 stehen, so wird das Verhältnis der Fallbeschleunigungen

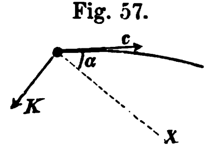
$$g_1 : g = 327000 : 108^2 = \text{rund } 28.$$

An der Oberfläche der Sonne beträgt also die Fallbeschleunigung ungefähr 275 $^{m}/_{sek^2}$; an der Oberfläche des Mondes etwa nur $^1/_6 \cdot 9{,}81 = 1{,}64$ $^{m}/_{sek^2}$.

11. Parabolische Bewegung im allgemeinen.

Die alleinige Einwirkung der als gleichbleibend betrachteten Schwere bewirkte eine Bewegung des Massenpunktes in einer Parabel, deren Achse lotrecht abwärts, d. h. übereinstimmend mit der Kraft gerichtet, deren Parameter $c^2 \cos^2 \alpha : g$ betrug.

Fig. 57.



Wirken nun auf den Massenpunkt beliebig viele nach Gröfse und Richtung gleichbleibende Kräfte, so können diese zu einer ebenfalls gleichbleibenden Mittelkraft K zusammengesetzt werden. Wählt man die Kraftrichtung dann zur negativen y-Richtung, die x-Achse rechtwinklig dazu in der durch K und die Anfangsgeschwindigkeit c bestimmten Ebene, so ist wiederum (Fig. 57) $c \cos \alpha$

die gleichbleibende Geschwindigkeit v_x, während in der y-Richtung die gesamte Verzögerung $K:m$ auftritt. Es entstehen daraus die Seitenbewegungen

$$x = c \cos \alpha t;$$

$$y = c \sin \alpha t - \frac{K}{m} \frac{t^2}{2}, \text{ und aus beiden}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{K}{m} \frac{x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha}.$$

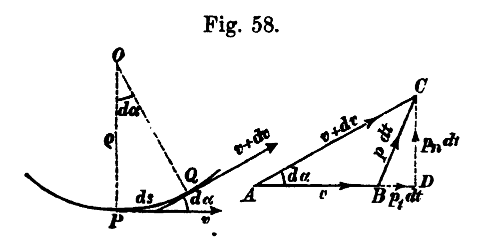
Die Verhältnisse sind also gerade so wie bei der Wurfbewegung; statt der lotrechten Richtung kommt aber hier die Richtung der Mittelkraft, statt der Fallbeschleunigung g der Wert $K:m$ in Frage. Es folgt hieraus: Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einwirkung gleichbleibender Kräfte in einer Parabel, deren Achse mit der Mittelkraft K aller wirkenden Kräfte gleichgerichtet, deren Parameter $= \frac{m c^2 \cos^2 \alpha}{K}$ ist.

12. Tangential- und Normalbeschleunigung.

Nach S. 31 ist zu jeder Änderung der Geschwindigkeit, sowohl der Gröfse, wie der Richtung nach, eine Kraft erforderlich. Es soll nun für eine gegebene, ungleichförmige und krummlinige Bewegung die zur Gröfsen- bezw. zur Richtungsänderung aufzuwendende Kraft bestimmt werden.

In der gegebenen Bahnlinie (Fig. 58) bewege sich der Massenpunkt in einem Augenblicke mit der Geschwindigkeit v, beschreibe während des nächsten Zeitteilchens dt das Bahnteilchen $PQ = ds$; dann hat die Geschwindigkeit eine Richtungsänderung um den Winkel $d\alpha$ erfahren, während ihre Gröfse $v + dv$ geworden sein möge. Trägt man dann von einem Punkt A aus v und $v + dv$ als Strecken auf, so ist deren geometrische Differenz BC die Elementarbeschleunigung $p \cdot dt$ (vergl. S. 24). Zeichnet man noch das bei D rechtwinklige Dreieck BDC, so ist $p \cdot dt$ die geometrische Summe von BD und DC. Die wahre Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung hat die Richtung BC und läfst sich zerlegen in eine Seitenbeschleunigung in der Richtung der Bewegung, oder der Tangente an die Bahnlinie, die sogenannte

Fig. 58.



Tangentialbeschleunigung p_t und eine dazu rechtwinklige, in die Richtung der Normalen PO fallende, die sog. Normalbeschleunigung p_n. Danach sind dann $BD = p_t dt$ und $DC = p_n dt$ die entsprechenden Elementarbeschleunigungen. Nach der Figur ist aber $p_t dt = (v + dv) \cos d\alpha - v$ oder, weil $\cos d\alpha = 1$ zu setzen, $p_t dt = v + dv - v = dv$, mithin

1) $$p_t = dv : dt.$$

Ferner ist $p_n dt = (v + dv) \sin d\alpha$ oder, da $\sin d\alpha = d\alpha$ und $dv \cdot d\alpha$ als unendlich klein höherer Ordnung gegen $v \cdot d\alpha$ zu vernachlässigen, $p_n dt = v \cdot d\alpha$. Weil aber $PQ = ds = v \cdot dt = \varrho \cdot d\alpha$ oder $d\alpha = v \cdot dt : \varrho$, so wird $v \cdot d\alpha = v^2 dt : \varrho$ oder

2) $$p_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Ist die Bahnlinie eine ebene Kurve, so liegen beide Beschleunigungen p_t und p_n in der Ebene der Kurve, und ϱ ist der Krümmungshalbmesser. Ist die Bahnlinie aber doppelt gekrümmt, so bestimmen die an die beiden unendlich nahen Punkte gezogenen Tangenten v und $v + dv$ die sog. Krümmungsebene; in dieser liegt dann die Figur $ABDC$, somit auch die Beschleunigungen p, p_t und p_n. O ist dann der Schnittpunkt der in der Krümmungsebene liegenden beiden Normalen PO und QO an die Kurve, der sog. Hauptnormalen, deren als gleich zu betrachtende Länge ϱ der erste Krümmungshalbmesser genannt wird.

Die Tangentialbeschleunigung $p_t = dv : dt$ stellt allein die Gröfsenänderung der Geschwindigkeit dar, die Normalbeschleunigung dagegen, welche mit $1 : \varrho$, d. h. mit der Krümmung der Bahnlinie verhältnisgleich wächst, vertritt die Richtungsänderung. Die Normalbeschleunigung heifst auch Zentripetalbeschleunigung, weil ihr Sinn stets nach dem ersten Krümmungsmittelpunkte gerichtet ist. Die wahre Beschleunigung ist die geometrische Summe der beiden berechneten Beschleunigungen, steht somit nach Gröfse, Richtung und Sinn fest. Die Gesamtbeschleunigung p kann nur dann mit p_t zusammenfallen, also in der Richtung der Bewegung liegen, wenn $p_n = 0$, d. h. wenn $\varrho = \infty$, die Bahnlinie an der betreffenden Stelle in der Krümmungsebene ohne Krümmung ist. Es fällt p mit p_n zusammen, wenn $p_t = dv : dt = 0$ ist, d. h. wenn die krummlinige Bewegung gleichförmig erfolgt.

Werden die Beschleunigungen mit der Masse m des Punktes multipliziert, so erhält man die entsprechenden Kräfte. Zur Gröſsenänderung der Geschwindigkeit ist hiernach eine tangential gerichtete Kraft $K_t = m \cdot dv : dt$, zur Richtungsänderung eine nach dem (ersten) Krümmungsmittelpunkte gerichtete Zentripetalkraft $K_n = mv^2 : \varrho$ erforderlich.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft, die stets normal zur Bahnlinie gerichtet ist, so entsteht nur eine Normalbeschleunigung, also eine gleichförmige krummlinige Bewegung, was übrigens auch schon daraus folgt, daſs eine Kraft von solcher Richtung nach S. 43 keine Arbeit verrichtet, mithin auch keine Änderung des Arbeitsvermögens hervorbringen kann. Die Wirkung einer solchen Kraft besteht lediglich in einer Richtungsänderung der Geschwindigkeit.

Beispiel: Astronomischen Beobachtungen zufolge ist die Bewegung des Mondes um die Erde nahezu eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = 1020\,{}^{m}/_{sek}$ in einem Kreise, dessen Halbmesser etwa 60 Erdhalbmessern gleich ist (vergl. S. 58). Die Beschleunigung des Mondes, wenn man denselben als Massenpunkt auffaſst, besteht daher in einer stets nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Beschleunigung $\frac{v^2}{\rho} = \frac{1020^2}{60 \cdot 6370000} = 0{,}0027\,{}^{m}/_{sek^2}$. Der Umstand, daſs diese Beschleunigung und die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche sich wie 1 zu $3600 = 1 : 60^2$, mithin umgekehrt wie die Quadrate der Abstände von dem Erdmittelpunkte, verhalten (s. S. 58), hat Newton zuerst veranlaſst, die Anziehungskraft zwischen zwei Massenpunkten als umgekehrt verhältnisgleich dem Quadrat ihrer Entfernung anzunehmen, welche Annahme dann, nachdem sie sich auch für die Planeten als zutreffend erwiesen hatte, zu dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (S 54) führte.

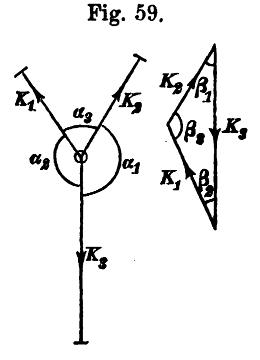
13. Gleichgewicht eines Massenpunktes.

Liefern die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte eine Mittelkraft $R = 0$, so bewegt sich der Punkt gerade so, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte; seine Geschwindigkeit erfährt dann weder der Gröſse noch der Richtung nach eine Änderung, er bewegt sich geradlinig und gleichförmig, und man sagt, die Kräfte halten sich an dem Massenpunkt im Gleichgewichte (vergl. S. 39). Ein besonderer Fall einer solchen Bewegung ist der Ruhezustand, in welchem nicht allein die Beschleunigung Null ist, sondern auch die Geschwindigkeit.

Halten beliebig viele Kräfte an einem Massenpunkt einander das Gleichgewicht, so ist jede derselben der Mittelkraft aller übrigen gleich und entgegengesetzt; denn sie hebt in diesem Falle jene Mittelkraft auf, somit auch die Wirkung aller derjenigen Kräfte, die durch diese Mittelkraft ersetzt wurden.

Sollen 3 Kräfte K_1, K_2 und K_3 an einem Punkte im Gleichgewichte sein, so mufs die Mittelkraft von irgend zweien dieser Kräfte durch die dritte aufgehoben werden. Da aber (nach S. 38) die Mittelkraft zweier Kräfte mit beiden in derselben Ebene liegt, so müssen für den Gleichgewichtszustand **die Richtungen der 3 Kräfte in derselben Ebene liegen.** Bezeichnet man noch die den Kräften gegenüberliegenden Richtungswinkel mit α_1, α_2 und α_3 (Fig. 59) und bedenkt, dafs nach S. 41 der Streckenzug der drei Kräfte ein geschlossenes Dreieck bilden mufs, so läfst sich aus diesem das Verhältnis der drei Kräfte berechnen. Man erkennt leicht, dafs die Dreieckswinkel β die Nebenwinkel der den Kräften gegenüberliegenden Richtungswinkel α sind. Die Sinus der Winkel β sind daher gleich den Sinus der entsprechenden Winkel α. Man erhält sonach aus

Fig. 59.



$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin\beta_1 : \sin\beta_2 : \sin\beta_3$$

die Gleichung

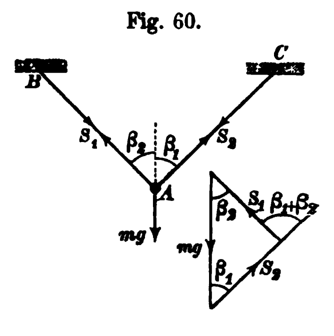
$$K_1 : K_2 : K_3 := \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3 .$$

Die Gröfsen von drei an einem Massenpunkte sich im Gleichgewichte haltenden Kräften verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Richtungswinkel. Aus der Figur folgt sofort: **Fallen von den drei Kräften zwei in dieselbe Richtungslinie, so mufs die dritte Null sein, wenn sie nicht ebenfalls in derselben Geraden liegt.**

Beispiel: Ein Massenpunkt sei an zwei Fäden AB und AC aufgehangen (Fig. 60) und befinde sich in Ruhe; es sollen die in den Fäden herrschenden Spannkräfte S_1 und S_2 ermittelt werden.

Die Spannkraft der Fäden, die wir einstweilen als gewichtlos, aber vollkommen biegsam und undehnbar voraussetzen, fällt mit den Richtungen der Fäden zusammen. Dies Zusammenfallen ist eben der Begriff der Biegsamkeit. Durch die Lage der Befestigungspunkte B und C, sowie durch die Fadenlängen ist das Dreieck BAC bestimmt. Auf den Massenpunkt wirkt die Schwere mg; dann müssen die Strecken mg, S_1 und S_2 ein geschlossenes Dreieck bilden, mithin, weil mg lotrecht ist, in einer lotrechten Ebene liegen. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, wenn der Massenpunkt sich in der durch B und C gelegten lotrechten Ebene befindet. (Andernfalls wird der Punkt an den Fäden als ein Pendel so lange schwingen, bis infolge von Luft- und anderen Widerständen endlich in lotrechter Ebene Ruhe eintritt.) Schliefsen BA und CA mit der Lotrechten die spitzen Winkel β_2 und β_1 ein, so wird aus dem Krafteck

Fig. 60.



$$S_1 : S_2 : mg = \sin \beta_1 : \sin \beta_2 : \sin (\beta_1 + \beta_2).$$

Ist z. B. $mg = 10^{\text{kg}}$, $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$, so wird aus der Figur

$$S_1 = S_2 = 10 \cdot \sqrt{1/2} = 7{,}07^{\text{kg}}.$$

Zu beliebig vielen Kräften $K_1 . K_2, \ldots K_n$, welche nicht in derselben Ebene liegen, wurde (auf S. 40) die Mittelkraft in der Form

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \text{ gefunden,}$$

worin $X = \Sigma K \cos \alpha$; $Y = \Sigma K \cos \beta$; $Z = \Sigma K \cos \gamma$ bedeuten. Soll nun Gleichgewicht herrschen, so mufs $R = 0$, also auch $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ werden; da nun die Kräfte, somit auch X, Y und Z stets reelle Gröfsen (wodurch negative Werte der Quadrate ausgeschlossen sind), so mufs jeder der Summanden Null sein, oder es mufs stattfinden:

$$\Sigma K \cos \alpha = 0; \quad \Sigma K \cos \beta = 0; \quad \Sigma K \cos \gamma = 0.$$

Also: An einem Massenpunkte halten sich beliebig viele Kräfte im Gleichgewichte, wenn in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung in jede Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte gleich Null ist.

Da die Mittelkraft gegebener Kräfte (nach S. 41) auch durch die Schlufslinie eines ebenen oder räumlichen Kraftecks gefunden wird, so ist klar, dafs die Schlufsseite Null werden mufs, wenn die

Kräfte im Gleichgewichte sein sollen. Im Gleichgewichts-Zustande müssen also die Kräfte ein geschlossenes Krafteck mit übereinstimmendem Umfahrungssinne der Pfeile bilden.

Liegen die Kräfte in einer gemeinsamen Ebene, so legt man zweckmäfsig auch die x- und y-Achse in diese Ebene. Dann werden die Neigungswinkel γ gegen die z-Achse sämtlich zu 90^0 und $K \cos \gamma$ durchweg Null. Aufserdem wird dann $\cos \beta = \sin \alpha$, und die Gleichgewichts-Bedingungen beschränken sich auf

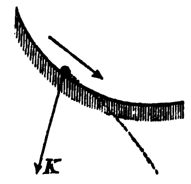
$$\Sigma K \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma K \sin \alpha = 0.$$

Liegen die x- und y-Achse bezw. wagerecht und lotrecht, so sagt man auch: Die Summe aller wagerechten Seitenkräfte mufs Null sein und die Summe aller lotrechten Seitenkräfte ebenfalls.

14. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine gegebene Kraft K ein, so wird er bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c eine bestimmte Bewegung ausführen müssen, die z. B. parabolisch ist, wenn K gleichbleibend nach Gröfse und Richtung.

Fig. 61.



Ist aber der Punkt nicht völlig frei, sondern in Berührung mit der Oberfläche eines unbeweglichen festen Körpers (Fig. 61), welcher derartig geformt ist, dafs er den Massenpunkt verhindert, sich so (in der punktierten Bahn) zu bewegen, wie es unter alleiniger Wirkung von K geschehen müfste, so übt die feste Oberfläche einen Einflufs auf die Bewegung des Massenpunktes aus, und einen solchen Einflufs haben wir (nach S. 31) als eine Kraft aufzufassen, welche als zweite Kraft zu K hinzutritt und ihrer Gröfse nach von K in gewisser Weise abhängig ist.

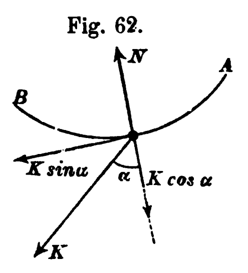
Wir benutzen den Erfahrungssatz: Vollkommen glatte Körper, die sich ohne ein Bindemittel berühren, können an jeder Berührungsstelle nur einen gegenseitigen Druck, dessen Richtung rechtwinklig zur Berührungsebene steht, also einen gegenseitigen Normaldruck, aufeinander ausüben. Völlig glatte Körper gibt es freilich

nicht; obiger Satz trifft aber um so mehr zu, je gröfser der Grad der Glätte ist, und umgekehrt. Die bezeichnete Kraft heifst der Normalwiderstand der vorgeschriebenen Fläche und wird mit N bezeichnet.

Noch enger beschränkt ist die Bewegung des Massenpunktes, wenn ihm eine bestimmte Linie als Bahn vorgeschrieben wird, z. B. durch eine Röhre, welche den als Massenpunkt gedachten Körper derartig umschliefst, dafs er sich nur längs der Mittellinie der Röhre bewegen kann, oder durch einen steifen glatten Draht, auf dem der Massenpunkt mittels einer Bohrung geführt wird. Beide Vorrichtungen sind geeignet, nach allen Richtungen innerhalb einer Normalebene zur vorgeschriebenen Bahnlinie den Widerstand N zu leisten. Diese Kraft N tritt stets in derjenigen Richtung und Gröfse auf, die erforderlich sind, um den Massenpunkt an dem Verlassen der vorgeschriebenen Bahnlinie zu hindern. N ist hiernach eine bedingte oder eine Bedingungskraft.

Der Normalwiderstand N kann bestimmt werden mit Hülfe der Formel für die Zentripetalbeschleunigung (S. 61).

Fig. 62.



Ein Punkt bewege sich auf der vorgeschriebenen ebenen Bahnlinie (Fig. 62) von A nach B unter Einwirkung einer gegebenen, in der Ebene der Kurve liegenden Kraft K, zu der die unbekannte Kraft N hinzutritt. Ob man N anfänglich nach innen oder nach aufsen gerichtet annimmt, ist grundsätzlich gleichgültig. Ist das Endergebnis positiv, so war der angenommene Sinn richtig, andernfalls ist er umzukehren. Schliefst K mit der Normalen den Winkel α ein, so zerlegt man K in $K \sin \alpha$ (in der Bewegungsrichtung) und $K \cos \alpha$ rechtwinklig dazu. Dann wird $K \sin \alpha$ als einzige Tangentialkraft die Tangentialbeschleunigung erzeugen; so dafs $dv : dt = K \sin \alpha : m$ wird. In der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt ergibt sich als Gesamtkraft $N - K \cos \alpha$. Diese mufs die Zentripetalbeschleunigung hervorbringen, daher ist

1) $$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{N - K \cos \alpha}{m} \quad \text{oder}$$

2) $$N = \frac{m v^2}{\varrho} + K \cos \alpha .$$

Ist K so gerichtet, dafs die Pfeilspitze von $K \cos \alpha$ nach dem Krümmungsmittelpunkte hinweist, so wird

$$N = \frac{m v^2}{\varrho} - K \cos \alpha. \tag{3}$$

Dem Anfänger ist dringend zu empfehlen, in jedem vorliegenden Falle dieser Art die Gleichung 1 für die Zentripetalbeschleunigung anzusetzen und daraus erst N zu berechnen, nicht aber zu versuchen, die Formeln 2 oder 3 für N unmittelbar anzuschreiben, weil dabei erfahrungsmäfsig leicht Irrtümer begangen werden.

Ist in Gleichung 3 die Seitenkraft $K \cos \alpha$ allein schon imstande, die Zentripetalbeschleunigung zu erzeugen, ist nämlich

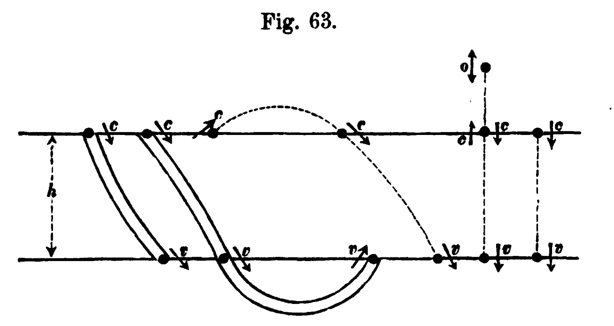
$$K \cos \alpha = \frac{m v^2}{\varrho},$$

so wird $N = 0$. An einer Stelle der Bahnlinie, für welche dies gilt, ist die Röhrenwandung bezw. der Führungsdraht überflüssig.

Für die Fälle der vorgeschriebenen Bewegung ist der Satz vom Arbeitsvermögen besonders vorteilhaft, weil der unbekannte Widerstand N keine Arbeit verrichtet, daher auch keinen Einflufs auf die Geschwindigkeitsgröfse hat.

Von besonderer Wichtigkeit sind solche Fälle der vorgeschriebenen Bewegung, bei denen als bewegende Kraft nur die Schwere auftritt. Denkt man sich zwei wagerechte Ebenen im Abstande h voneinander (Figur 63), die durch beliebig, aber stetig gekrümmte Röhren als vorgeschriebene Bahnlinie miteinander verbunden sind, so wird ein Massenpunkt, der oben mit einer Geschwindigkeit c in eine Röhre geworfen wird, sie unten mit der Geschwindigkeit v verlassen, und es gilt, weil nur die Schwere Arbeit verrichtet,

Fig. 63.



$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m c^2 = m g h \quad \text{oder}$$

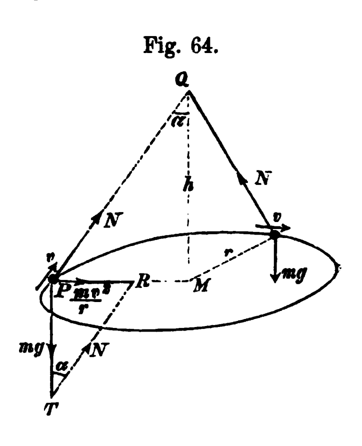
$$v^2 = c^2 + 2 g h,$$

ganz wie bei der freien Fallbewegung. Ob der Punkt in freier (gerader oder parabolischer) Bahnlinie oder in beliebig gekrümmter vorgeschriebener Bahnlinie sich bewegt, ist für die Geschwindigkeitsgröfse gleichgültig. Jedesmal, wenn er um h sich gesenkt hat, wird das Quadrat der Geschwindigkeit um $2gh$ gewachsen sein. Bei aufwärts gerichteter Bewegung gilt $v^2 = c^2 - 2gh$.

15. Vorgeschriebene Bewegung in wagerechtem Kreise.

Die vorgeschriebene Bahn, etwa aus einem kreisförmig gebogenen Drahte gebildet (Fig. 64), liege in wagerechter Ebene; r sei der Halbmesser. Als bewegende Kraft wirke die Schwere mg. Die Bewegung kann nur eine gleichförmige sein, weil die Schwere hier keine Arbeit verrichtet. Für diese Bewegung ist eine Zentripetalkraft $mv^2:r$, von P nach M gerichtet, erforderlich; folglich mufs zu mg ein derartiger Normalwiderstand N hinzutreten, dafs die Mittelkraft beider $PR = mv^2:r$ wird. Ist $PT = mg$, so wird die Strecke TR das gesuchte N darstellen. Selbstverständlich ist dann N an den Punkt P parallel zu verschieben. N weicht von der Lotrechten um einen Winkel α ab, für welchen gilt

Fig. 64.



$$1)\qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{rmg} = \frac{v^2}{gr}.$$

N kann auch aufgefafst werden als Mittelkraft aus einem von P nach M gerichteten Drucke $= mv^2:r$ und einem lotrecht aufwärts gerichteten von der Gröfse mg. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung übt der Massenpunkt auf die Bahn dieselben Kräfte in entgegengesetztem Sinn aus, drückt also mit der Kraft $mv^2:r$ nach aufsen, mit der Kraft mg lotrecht nach unten. Die Kräftefigur PTR liegt stets in einer lotrechten Ebene, läuft aber mit dem Massenpunkt um und dreht sich dabei um eine Lotrechte durch M als Achse. Die Richtungslinie von N geht dann durch

den festen Punkt Q dieser Achse, dessen Höhe h dadurch bestimmt ist, dafs bei Q der Winkel α sich wiederfindet. Es mufs dann sein (mit Rücksicht auf Gleichung 1):

$$2)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h} = \frac{v^2}{gr}, \quad \text{mithin}$$

$$3)\qquad h = \frac{gr^2}{v^2}.$$

Die Kraft N können wir nun, nachdem wir ihre Bedingungen erkannt haben, auch noch in anderer Weise ausüben als durch den Draht. Wir können in Q einen völlig biegsamen und undehnbaren Faden befestigen, diesen in solcher Weise gerade ausspannen, dafs h und r seine Projektionen sind, und bei P ihn mit dem Massenpunkte verbinden. Erteilen wir dann dem Massenpunkt eine Geschwindigkeit

$$4)\qquad v = r\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{gr\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{(nach Gl. 2 und 3)}$$

in wagerechter Richtung und zugleich rechtwinklig zum ausgespannten Faden, so sind die Bedingungen, welche ursprünglich durch den Draht erzwungen wurden, auch mittels dieser Fadenaufhängung erfüllt; es wird also der wagerechte Kreis vom Halbmesser r gleichmäfsig mit der Geschwindigkeit v durchlaufen werden.

Der Draht erzwingt auch bei anderer, etwa gröfserer, Geschwindigkeit v_1 eine gleichförmige Kreisbewegung, doch wird dann $\operatorname{tg}\alpha$ (nach Gl. 1) gröfser. Bei der weniger bestimmten Fadenaufhängung ist aber genau diejenige Geschwindigkeit v erforderlich, die Gl. 4 entspricht. Was erfolgt, wenn die abweichende Geschwindigkeit v_1 dem Punkt erteilt wird, soll weiter unten (S. 90) noch erörtert werden.

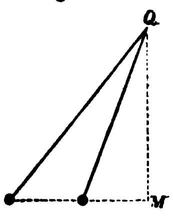
Da der Faden eine Kegelfläche beschreibt, so heifst diese Vorrichtung ein Kegelpendel, Bei einem Umlaufe mufs der Punkt die Wegeslänge $2r\pi$ zurücklegen, wozu eine Zeit t erforderlich ist, welche sich mit Hülfe von Gl. 4 zu

$$5)\qquad t = \frac{2r\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ergibt. Hiernach ist die Umlaufszeit t eines Kegelpendels nur von seiner Vertikalprojektion, der Höhe h, abhängig. Mehrere in Q

befestigte Kegelpendel gleicher Höhe h (Fig. 65) werden mithin dieselbe Umlaufszeit haben. Es rührt dies daher, daſs bei gleichem h die erforderlichen Geschwindigkeiten v nach Gl. 4 in gleichem Verhältnisse mit r, also auch mit den Wegeslängen eines Umlaufes wachsen.

Fig. 65.



Beispiel: Ist $r = 1$ m; $h = 1$ m, so muſs

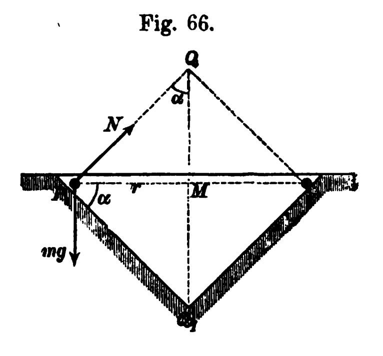
$$v = 1\sqrt{\frac{9{,}81}{1}} = 3{,}13 \text{ m/sek},$$

entsprechend einer Fallhöhe $r^2 : 2h = 1/2$ m, gemacht werden.

Es ist dann die Umlaufszeit $t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}01$ Sekunden.

Anstatt durch die Spannkraft eines Fadens kann die Kraft N auch durch den Gegendruck einer festen Fläche ausgeübt werden; letztere muſs an der Stelle der Berührung mit dem Massenpunkte rechtwinklig zur Richtung von N stehen, mithin von der Wagerechten um den durch Gleichung 1 bestimmten Winkel abweichen. Dieser Bedingung würde genügt werden durch eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkte Q (Fig. 64) und dem Halbmesser QP, welche der unmittelbarste Ersatz des Fadens QP sein würde. Eine Kegelfläche mit der Spitze in Q_1 (Fig. 66) erfüllt die Bedingung aber ebenfalls, sobald ihre Seiten mit der Wagerechten den Winkel α bilden. Soll der Massenpunkt in solchem Trichter eine wagerechte Kreisbewegung vom Halbmesser r ausführen, so muſs ihm eine wagerechte Anfangsgeschwindigkeit rechtwinklig zu MP von der Gröſse $v = \sqrt{gr \operatorname{tg} \alpha}$ (Gl. 4) erteilt werden.

Fig. 66.



Einer solchen Kegelfläche müssen auch die Oberkanten der beiden Schienen eines Eisenbahngleises angehören, wenn die Mittellinie desselben in einem wagerechten Kreisbogen vom Halbmesser r liegt.

Würden die Schienen nämlich in gleicher Höhe liegen (Fig. 67), so könnte die erforderliche Zentripetalkraft $mv^2 : r$ nur von dem

seitlichen Gegendrucke H der äufseren Schiene gegen den Spurkranz des Rades geliefert werden. Einer solchen Aufgabe ist aber die Schiene bei gröfserer Geschwindigkeit, wobei H grofs wird, nicht gewachsen.

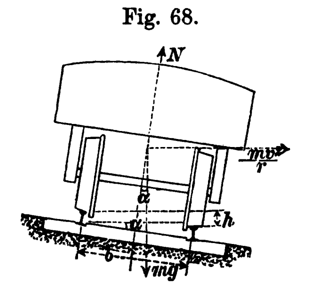
Fig. 67.

Hebt man nun die äufsere Schiene um h gegen die innere (Fig. 68), so dafs die Oberfläche des Schienengleises um α gegen die Wagerechte geneigt ist, so leistet das Gleis einen Normalwiderstand N, der um α von der Lotrechten abweicht und mit dem Gewicht mg die nötige Zentripetalkraft $mv^2 : r$ liefert. Ein Seitendruck der Schienen gegen die Spurkränze tritt nun nicht ein, wenn die Geschwindigkeit v dem Winkel α entspricht, d. h. wenn $v = \sqrt{gr \operatorname{tg} \alpha}$ ist.

Ist b die Entfernung der beiden Schienen eines Gleises (Fig. 68) so beträgt die erforderliche Überhöhung der äufseren Kurvenschiene

$$h = b \sin \alpha, \text{ wobei } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gr}.$$

Fig. 68.



In den vorkommenden Fällen der Anwendung ist α stets so klein, dafs $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt werden kann, so dafs

$$h = b \frac{v^2}{gr} \text{ wird.} \tag{6}$$

Beispiel: Für eine Eisenbahnkurve von 600 m Halbmesser, $b = 1{,}5$ m Schienentfernung ergibt sich für 20 m sekundl. Geschwindigkeit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20^2}{9{,}81 \cdot 600} = 0{,}068; \; \alpha = 3^0 54'; \; \sin \alpha = 0{,}068; \; h = 1{,}5 \cdot 0{,}068 = 0{,}102 \text{ m}.$$

Diese Formel ist beim Eisenbahnbau lange benutzt worden; in neuerer Zeit hat man statt ihrer eine einfache Erfahrungsformel gewählt, was darin seine Begründung findet, dafs die

Schienenüberhöhung nicht allein dem hier besprochenen Zwecke dienen, sondern zugleich noch andere Verhältnisse berücksichtigen muſs.

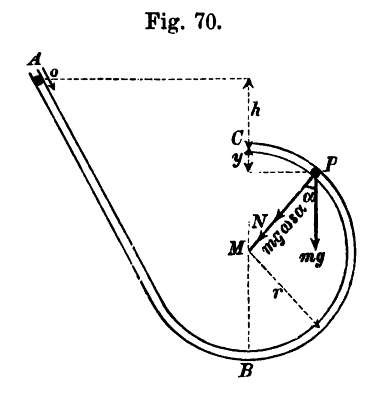
Fig. 69.

Beispiel: Auf demselben Grunde beruht die Notwendigkeit der Schrägstellung eines Kunstreiters (Fig. 69), welcher, auf dem Pferde stehend oder sitzend, im Kreise vom Halbmesser r mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt. Für $r = 5$ m, $v = 3$ m/sek wird $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3^2}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}18$; α etwa $= 10^\circ$. Wächst aber die Geschwindigkeit auf $v = 5$, so wird $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}51$; $\alpha = 27^\circ$.

16. Vorgeschriebene Bewegung in lotrechtem Halbkreise.

BPC (Fig. 70) sei eine nach einem Halbkreise vom Halbmesser r gebogene Röhre in lotrechter Ebene. Bei B schlieſse sich tangential eine Röhre AB von beliebiger Form an; A liege um h über dem Punkte C. Läſst man nun bei A einen Massenpunkt mit der Geschwindigkeit Null in die Röhre gelangen und gleitet er darin ohne Reibung und ohne Klemmen, so tritt er bei B mit einer Geschwindigkeit $v_{max} = \sqrt{2g(h + 2r)}$ in den Halbkreis, weil er von A bis B die Höhe $h + 2r$ durchsunken hat. Von B aus aufwärts steigend, verliert er an Geschwindigkeit, und zwar ist

Fig. 70.



diese an einer beliebigen Stelle P (bestimmt durch den Winkel α) noch $v = \sqrt{2g(h + y)} = \sqrt{2g(h + r - r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand der Röhre sei N (nach innen gerichtet); dann zerlegt sich mg in $mg \sin\alpha$ (tangential und verzögernd) und $mg \cos\alpha$ (zentripetal). Es wird $\frac{v^2}{r} = \frac{N + mg\cos\alpha}{m}$, mithin

$$1) \qquad N = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\alpha = mg\left(\frac{2h}{r} + 2 - 3\cos\alpha\right).$$

Für $\alpha = 0$ (Punkt C) wird $\cos\alpha$ möglichst grofs, nämlich $= 1$, daher N möglichst klein, nämlich

$$2) \qquad N_{min} = mg\left(\frac{2h}{r} - 1\right);$$

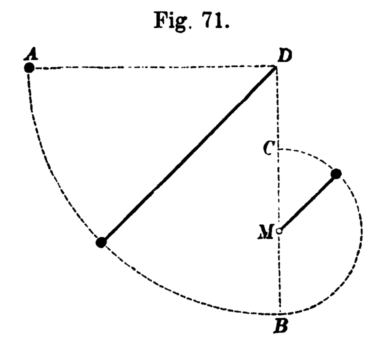
für $\alpha = \pi$ (Punkt B) wird $\cos\alpha$ möglichst klein, nämlich $= -1$ und N möglichst grofs, nämlich

$$3) \qquad N_{max} = mg\left(\frac{2h}{r} + 5\right).$$

Im allgemeinen kann N positiv oder negativ werden. Ein positives N bedeutet einen nach innen gerichteten Widerstand, der von der äufseren Wand der Röhre zu leisten ist, und umgekehrt. Überall wo $N > 0$, mufs die äufsere Wandung wirken; gegen diese legt sich der Massenpunkt, während die innere Wand überflüssig ist. Soll an allen Stellen $N \geqq 0$ sein, so mufs nach Gl. $2h \geqq {}^1/_2\, r$ sein. In diesem Fall ist, statt einer völligen Röhre, eine einfache Rinne oder ein äufserer Zylindermantel hinreichend, welcher den Massenpunkt hindert, sich von der Kreisbahn tangential nach aufsen hin zu entfernen.

Beispiel: Ein stetes positives N, welches den Punkt nur hindert, nach aufsen aus der vorgeschriebenen Bahn hinauszutreten, kann durch einen einfachen Faden geleistet werden. Damit N auch an der höchsten Stelle noch > 0 bleibe, mufs $h > {}^1/_2\, r$ sein. Es möge etwa $h = r$ gemacht werden. Dazu benutze man einen Faden von der Länge $3r$ (Fig. 71) und befestige diesen in D. Der Faden wird in der Lage DA wagerecht ausgestreckt; läfst man nun den Massenpunkt los, so beschreibt er den Viertelkreis AB. In M mufs nun ein vorstehender dünner Stift sich befinden, damit die oberen zwei Drittel der Fadenlänge in der Lage DM zur Ruhe kommen, das untere Drittel r des Fadens aber sich um M drehe und den Punkt zur Bewegung BC zwinge. Ist der Massenpunkt unmittelbar rechts von B, so wird die Fadenspannkraft $N_{max} = mg\,(2 + 5) = 7\,mg$, d. h. 7 mal so grofs, als wenn der Punkt ruhend an dem Faden hinge. Bei der Bewegung nach C hin vermindert sich die Spannkraft auf $N_{min} = mg\,(2 - 1) = mg$. Der Massenpunkt wird sich, nachdem er C erreicht hat, in dem kleineren Kreise weiter bewegen (symmetrisch zu CB), und es würde sich der Faden allmählich auf den Stift bei M aufwickeln. Wenn man

Fig. 71.



aber in dem Augenblicke, wo der Massenpunkt zum ersten Male wieder in *B* angelangt ist, den Stift *M* entfernt oder den Faden vom Stift abschiebt, so wird der Massenpunkt symmetrisch zu *BA* einen Viertelkreis vom Halbmesser $3r$ beschreiben und auf der rechten Seite sich bis zur Höhe des Punktes *A* wieder erheben.

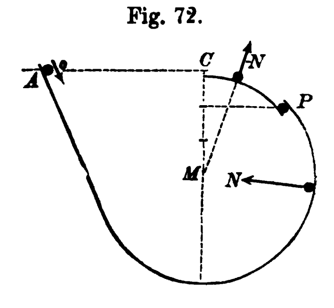
Liegt (Fig. 72) der Anfangspunkt A der Bewegung in gleicher Höhe mit C, ist die Überhöhung $h = 0$, so wird nach Gl. 1, 2 und 3 (S. 72 u. 73)

$$N = mg(2 - 3\cos\alpha);$$

$$N_{max} = mg \cdot 5; \quad N_{min} = -mg.$$

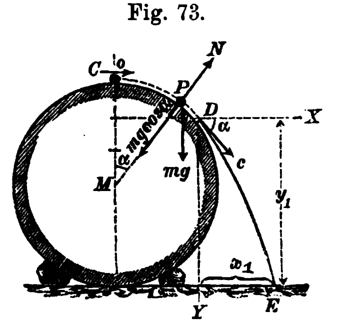
Mithin wird im oberen Teile des Kreises N negativ, nach aufsen gerichtet, d. h. der Massenpunkt drückt gegen die innere Wandung der Röhre. Der Übergang aus dem Positiven ins Negative erfolgt bei $\cos\alpha = {}^2/_3$; $\alpha = 48^0$; hier ist $N = 0$. Diese Stelle P ist am einfachsten durch Zeichnung zu finden; man teile MC in drei gleiche Teile und ziehe durch den oberen Teilpunkt eine Wagerechte, so bestimmt diese den Punkt P. Unterhalb derselben ist ein äufserer, oberhalb ein innerer Mantel erforderlich.

Fig. 72.



Diese Betrachtungen finden auch auf einen solchen Fall teilweise Anwendung, wo nur ein innerer Mantel vorhanden ist (Fig. 73), auf welchem der Massenpunkt gleitet. Man denke sich einen ruhig liegenden zylindrischen Körper (Dampfkessel, Strafsenwalze, dicker Baumstamm oder dgl.), auf dessen höchster Stelle wir einen Massenpunkt ruhen lassen. Bringt man ihn durch einen genügend schwachen Anstofs in Bewegung, so wird er beschleunigt abwärts gleiten. Der Anstofs soll so gering sein, dafs die Anfangsgeschwindigkeit bei C annähernd = Null gesetzt werden kann. An einer Stelle P ist dann die

Fig. 73.



Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2g(r - r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand N kann unter den vorliegenden Umständen nur nach

aufsen gerichtet auftreten. Daher mufs jetzt $\frac{v^2}{r} = \frac{mg \cos \alpha - N}{m}$, mithin $N = mg \cos \alpha - \frac{mv^2}{r} = mg\,(3 \cos \alpha - 2)$ sein. Für $\cos \alpha = {}^2/_3$ oder $\alpha = 48^0$ wird wiederum $N = 0$; an dieser Stelle drückt der Punkt nicht mehr gegen den zylindrischen Körper. Für $\alpha > 48^0$ oder $\cos \alpha < {}^2/_3$ müfste zur Fortsetzung der kreisförmigen Bewegung ein nach innen gerichteter Druck N auftreten; da dieser aber nicht geleistet werden kann, so wird der Punkt von dieser Stelle an ($\alpha = 48^0$) der kreisförmigen Bahnlinie nicht mehr folgen, es wird der Normalwiderstand zu wirken aufhören und der Punkt sich unter alleiniger Einwirkung der Schwere parabolisch weiter bewegen, sich also von dem walzenförmigen Körper trennen. Es soll die weitere Bewegung untersucht und namentlich festgestellt werden, wann und wo der Punkt bei E den Boden erreicht.

Die Geschwindigkeit, mit der diese Bewegung im Punkte D beginnt, ist $c = \sqrt{2g\,{}^1/_3 r}$ mit den Seitengeschwindigkeiten

$$c \cos \alpha = {}^2/_3 \sqrt{{}^2/_3\, g r} = \sqrt{{}^8/_{27}\, g r} = 1{,}7 \sqrt{r}$$

$$c \sin \alpha = \sqrt{1 - {}^4/_9}\, \sqrt{{}^2/_3\, g r} = \sqrt{{}^{10}/_{27}\, g r} = 1{,}9 \sqrt{r}.$$

Nach t Sekunden ist (von D als Anfangspunkt gerechnet)

$$x = t\, c \cos \alpha = t \sqrt{{}^8/_{27}\, g r}$$

$$y = t\, c \sin \alpha + {}^1/_2\, g t^2 = t \sqrt{{}^{10}/_{27}\, g r} + {}^1/_2\, g t^2.$$

Für den Endpunkt E gilt $y_1 = {}^5/_3\, r$ oder

$$y_1 = {}^5/_3\, r = t_1 \sqrt{{}^{10}/_{27}\, g r} + {}^1/_2\, g t_1^{\,2}.$$

Daraus erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{27 g}}\,(10 - \sqrt{10}) = 0{,}42 \sqrt{r}$$

und hiermit $x_1 = (10 - \sqrt{10}) \sqrt{\frac{r}{27 g} \frac{8}{27}\, g r} = 0{,}716\, r.$

Der Abstand des Endpunktes E von der Lotrechten CM wird dann

$$r \sqrt{{}^5/_9} + x_1 = 1{,}46\, r.$$

Der vorgeschriebenen kreisförmigen Bewegung und der freien parabolischen Bewegung entsprechen im Punkte D dieselben Kräfte.

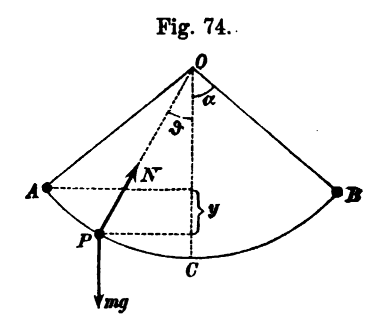
Daraus folgt, dafs Parabel und Kreis an der Stelle D nicht allein den Punkt D und die Berührungsgerade gemein haben, sondern dafs bei D auch der Krümmungshalbmesser ϱ der Parabel gleich demjenigen der Kreislinie, nämlich $\varrho = r$ sein mufs. Berechnet man nach den Formeln der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie den Krümmungshalbmesser der parabolischen Bahnlinie DE und setzt in der betreffenden Formel $x = 0$ (Punkt D), so ergibt sich auch tatsächlich $\varrho = r$.

In ähnlicher Weise würde, wenn in Fig. 72 zwischen P und C die innere Röhrenwandung fehlte, der Massenpunkt bei P in eine parabolische Bewegung übergehen, die sich nicht bis zur Höhe des Punktes C erheben würde.

17. Einfaches (mathematisches) Pendel.

Wiederum möge ein Massenpunkt auf einen kreisförmig gebogenen Draht in lotrechter Ebene unter Einwirkung der Schwere sich bewegen, jedoch möge der höchste Punkt, wo die Geschwindigkeit Null ist, im unteren Halbkreise liegen (Fig. 74). Der Halbmesser des Kreisbogens sei l. Die Anfangslage A sei durch den Winkel α, eine beliebige Zwischenlage P durch den Winkel ϑ bezeichnet. Der Massenpunkt wird an der Stelle B, die mit A in gleicher Höhe liegt, wieder die Geschwindigkeit Null haben, wird nach A zurückgehen und den Bogen AB und BA fortgesetzt durchlaufen symmestrisch zur tiefsten Lage C. Solche Bewegung heifst Schwingung. In der beliebigen Lage P ist die Geschwindigkeit

Fig. 74.



1) $$v = \sqrt{2\,g\,y} = \sqrt{2\,g\,l\,(\cos\vartheta - \cos\alpha)}.$$

Es mufs also nach Gl. 1, S. 66 sein:

$$\frac{v^2}{l} = 2\,g\,(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \frac{N - m\,g\cos\vartheta}{m} \text{ oder}$$

2) $$N = m\,g\,(3\cos\vartheta - 2\cos\alpha).$$

Da ϑ und α beide kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sind, so wird für $\vartheta = \alpha$ $N_{min} = m\,g\cos\alpha$, für $\vartheta = 0$ aber $N_{max} = m\,g\,(3 - 2\cos\alpha)$.

Für $\alpha = 48^0$ und $\cos\alpha = {}^2/_3$ wird z. B. $N_{min} = {}^2/_3\, m g$; $N_{max} = {}^5/_3\, m g$.

Da N stets positiv ist, kann es durch die Spannkraft eines in O befestigten Fadens, an dem der Massenpunkt hängt, geleistet werden. In dieser Form heifst die Vorrichtung ein Pendel, u. zw. ein einfaches oder mathematisches, wenn man die Masse des Fadens vernachlässigt und einen einfachen Massenpunkt annimmt. Ein wirkliches (physisches) Pendel mit Rücksicht auf die körperliche Ausdehnung wird später untersucht werden. Betrachten wir die Bewegung von A aus, so ist die Wegeslänge in t Zeiteinheiten $s = AP = l(\alpha - \vartheta)$, daher

$$ds = -l\,d\vartheta = v\,dt = dt\sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)};$$

hieraus folgt

$$3)\quad dt = -\frac{l\,d\vartheta}{v} = -\frac{l\,d\vartheta}{\sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)}} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Dies ist die Zeit für die Zunahme des Winkels ϑ um $d\vartheta$. Wird nun in der Zeit t der Bogen AP zurückgelegt, so mufs

$$4)\qquad t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}} \text{ sein.}$$

Für $t = 0$ ist nämlich $\vartheta = \alpha$, für $t = t$ aber $\vartheta = \vartheta$. Die Intregation läfst sich in geschlossener Form nur ausführen, wenn man sich mit einer Annäherung begnügt, indem man nur **kleine** Winkel α berücksichtigt. Es ist $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2({}^1/_2\,\vartheta)$, und wenn man den Sinus von ${}^1/_2\,\vartheta$ mit dem Bogen ${}^1/_2\,\vartheta$ vertauscht,

$$\cos\vartheta = 1 - 2\,({}^1/_4\,\vartheta^2) = 1 - {}^1/_2\,\vartheta^2;$$

ebenso $\cos\alpha = 1 - {}^1/_2\,\alpha^2$, mithin $2(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \alpha^2 - \vartheta^2$. Also, wenn man noch in Gl. 4 die Grenzen vertauscht und daher gleichzeitig das Zeichen — durch + ersetzt,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_\vartheta^\alpha \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}. \quad \text{Dies gibt aber}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\vartheta}{\alpha}\right]_\vartheta^\alpha$$

und weil arc sin $1 = \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\frac{1}{2}\pi - \text{arc sin}\frac{\vartheta}{\alpha}\right\}.$$

Dies ist die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AP.

Um zu ermessen, wie grofs der Fehler der Annäherung ist, nehme man $\vartheta = 5^0$ an, dann ist $\cos\vartheta = \cos 5^0 = 0{,}996195$. Es ist aber $\vartheta = \text{arc } 5^0 = \frac{5\cdot\pi}{180} = 0{,}087266$, daher $1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 = 0{,}996192$; es kommt also erst in der 6ten Decimale eine Abweichung vor.

Die Dauer der Schwingung von A nach B ist offenbar doppelt so grofs wie die von A nach C (für $\vartheta = 0$), mithin wird die Dauer t_1 einer einfachen Schwingung von A nach B

$$5)\qquad t_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

was man auch erhält, wenn man zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ integriert. Es ist für Meter und Sekunden und für $g = 9{,}81$: $\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}003$, mithin

$$t_1 = 1{,}003\sqrt{l} \text{ oder annähernd } t_1 = \sqrt{l}.$$

Für $l = 1^m$ wird $t_1 = 1{,}003$ Sekunden, oder ein Pendel von 1^m Länge macht in der Stunde 3589 einfache Schwingungen. $t_1 = 1$ gibt $l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994^m$ als Länge des Sekundenpendels.

Da die Länge des Sekundenpendels mit g verhältnisgleich ist, so mufs diese Länge an der Oberfläche der Sonne bezw. des Mondes (nach S. 59) 28 bezw. $\frac{1}{6}$ mal so lang sein.

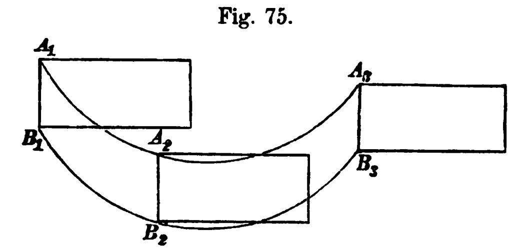
Man kann die Gleichung 5 auch schreiben $g = l\frac{\pi^2}{t_1{}^2}$, kann also mit Hülfe von Pendelschwingungen aus der gemessenen Pendellänge l und der beobachteten Dauer t_1 einer Schwingung die Fallbeschleunigung an der betreffenden Stelle der Erde berechnen.

18. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes in Bezug auf einen fortschreitenden Raum.

Die Bewegung eines körperlichen Gebildes, eines Raumes, heifst fortschreitend, wenn alle Teile desselben stets parallel ihrer

Anfangslage bleiben (Fig. 75); hiermit ist notwendig verknüpft, dafs dann alle Punkte des Körpers völlig übereinstimmende, nur parallel gegen einander verschobene Bahnlinien $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ beschreiben, daher in einem bestimmten Augenblicke völlig übereinstimmende Geschwindigkeiten haben.

Fig. 75.



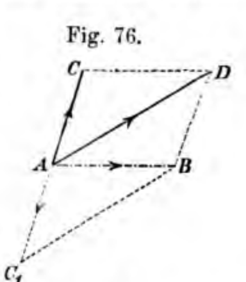
Die Bahnlinien brauchen dabei nicht geradlinig zu sein. Solche fortschreitenden Bewegungen werden auch Verschiebungen genannt, während man eine beliebige Bewegung, bei welcher der Körper der Anfangslage nicht parallel bleibt, als Verrückung bezeichnet.

Verschiebungen mit geraden Bahnlinien kommen sehr häufig vor; ein Eisenbahnwagen, ein Schiff führt solche auf geraden Strecken aus. Wenn aber der Wagen oder das Schiff einen krummlinigen Weg beschreibt, so erfährt der Eisenbahnwagen stets, das Schiff meistens eine Veränderung seiner Richtung, d. h. nicht mehr eine einfache Verschiebung. Eine parallele Verschiebung des Raumes wird im folgenden angenommen.

Wenn nun ein Massenpunkt während der Zeit t eine Bahnlinie AB (Fig. 76) beschreibt, diese Bahnlinie aber einem sich verschiebenden Raum angehört und daher der Punkt A gleichzeitig in dem Zeitraume t die Strecke AC zurücklegt, so wird nach S. 17 die wahre Bewegung des Punktes gefunden, indem man aus AB und AC ein Parallelogramm zeichnet, dessen vierter Eckpunkt D dann der wahre Ort des Punktes ist. Die Bewegung AB in dem fortschreitenden Raume heifst die scheinbare Bewegung des Punktes, weil ein in dem Raume befindlicher Beobachter, der die Bewegung des Raumes mitmacht, nur diese Bewegung wahrnimmt, oder die relative Bewegung in Bezug auf den Raum. Alle Bewegungen, die die Fahrgäste eines fahrenden Eisenbahnwagens in demselben ausführen, sind solche scheinbaren Bewegungen. Die wahre oder absolute Bewegung AD ist die Resultierende aus beiden Seitenbewegungen.

Häufig liegt die Aufgabe vor, aus der **wahren** Bewegung AD und der Verschiebung des Raumes AC die **scheinbare** Bewegung AB zu bestimmen. Dies kann nach den früheren Regeln (S. 27) geschehen, indem man die wahre Bewegung AD zerlegt in die eine Seitenbewegung AC (des Raumes) und die gesuchte scheinbare Bewegung AB, nämlich zu den drei Eckpunkten A, C und D den vierten Eckpunkt des Parallelogrammes sucht. Für die Anwendung ist es aber häufig vorteilhafter, das Verfahren so einzurichten, daſs die gesuchte Bewegung AB nicht als geometrische Differenz, sondern als geometrische Summe erscheint, d. h. das Parallelogramm so anzuordnen, daſs B dem Punkt A diagonal gegenüber liegt. Dies geschieht, indem man die Verschiebung AC des Raumes in entgegengesetztem Sinne, nämlich als AC_1, aufträgt und aus AD und AC_1 ein Parallelogramm zeichnet, in dem dann B der vierte Eckpunkt des Parallelogramms wird. Ob die Bewegungen AB, AC und AD geradlinig sind oder nicht, ist für das Verfahren der Zusammensetzung und Zerlegung (wie S. 27 gezeigt wurde) völlig gleichgültig. Bei den Bewegungen kommt es nur auf die Orte nach t Zeiteinheiten an, welche man für die Konstruktion durch Gerade verbinden kann. Dabei ist wieder nicht das ganze Parallelogramm erforderlich; vielmehr genügt es, der Strecke AD der wahren Bewegung die Strecke DB als Entgegengesetztes der Verschiebung des Raumes anzufügen, um in der Schluſsstrecke AB die scheinbare Bewegung zu erhalten. Wie früher gezeigt, gelten für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieselben Gesetze wie für die Bewegungen; daher haben wir die Sätze:

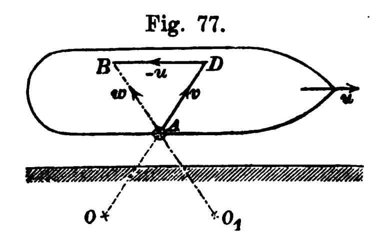
Fig. 76.



Die scheinbare Bewegung in einem fortschreitenden Raum ist die geometrische Summe aus der wahren Bewegung und dem Entgegengesetzten der Bewegung des Raumes. Die Geschwindigkeit bezw. Beschleunigung der scheinbaren Bewegung ist die geometrische Summe aus der wahren Geschwindigkeit bezw. Beschleunigung und dem Entgegengesetzten der Geschwindigkeit bezw. Beschleunigung des Raumes.

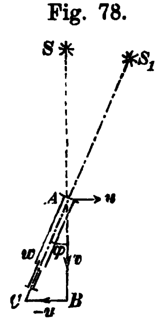
Beispiel 1: Ein Schiff bewege sich gleichförmig, geradlinig fortschreitend mit der Geschwindigkeit u nach rechts (Fig. 77). Vom Ufer aus werde ein Stein in der Richtung OA über das Verdeck hinweg geworfen. Von der Wurfbewegung wollen wir nur die geradlinige gleichförmige Seitenbewegung im Grundrisse berücksichtigen, die mit der wahren Geschwindigkeit v erfolgen möge. Ein auf dem Schiffe mitfahrender Beobachter erblickt nicht die wahre Bewegung, sondern nur die scheinbare, deren Geschwindigkeit w wir erhalten, indem wir in A die Strecke $v = AD$ auftragen und $DB = u$, aber nicht nach rechts, sondern mit entgegengesetztem Sinn, anfügen, dann ist AB die geometrische Summe von v und $-u$, d. h. die gesuchte scheinbare Geschwindigkeit w. In dieser Richtung AB wird der Stein über das Schiff hinwegstreichen, als ob der Wurf etwa von einem Ursprung O_1 herrührte. Ist der Stein vielleicht ein Stück Kreide, so wird er die Bahnlinie AB selbsttätig aufzeichnen können. Als Probe der Richtigkeit dient die Betrachtung, dafs die Geschwindigkeit w, verbunden mit der wirklichen Geschwindigkeit $BD = +u$ des Schiffes, als geometrische Summe wieder die wahre Geschwindigkeit $AD = v$ des Steines liefert. Ist das Verdeck vielleicht mit Tonnen, Ballen u. dergl. besetzt, so wird die Bewegung des Steines über dasselbe sich ungehindert nur dann entwickeln können, wenn längs AB zufällig eine Gasse frei geblieben ist. Diese Gasse ist dann gewissermafsen ein Kanal, eine Röhre, in welcher das fahrende Schiff den Stein so auffängt, dafs er, ohne seitlich gestört zu werden, über das Verdeck hinweggleiten kann.

Fig. 77.



Beispiel 2: Nach dem vorstehenden sind die Bedingungen zu beurteilen, unter denen ein Fixstern in der Mitte des Gesichtsfeldes eines Fernrohres erscheinen kann. Es findet dies statt, wenn der von dem Stern ausgehende Lichtstrahl sich in der Richtung der Mittellinie des Rohres fortpflanzt. Stände nun die Erde mit dem Fernrohre fest, so müfste das Rohr genau in die Richtung nach dem Sterne gestellt werden. Da aber die Erde mit dem Fernrohr eine Bewegung um die Sonne ausführt, so kommt die scheinbare Bewegung des Lichtes in Bezug auf die fortschreitende Erde in Frage. Ist (Fig. 78) u die Geschwindigkeit der fortschreitenden Erde und ist die Richtung nach dem zu betrachtenden Sterne rechtwinklig zu u, so hat man an die Geschwindigkeit des Lichtes $v = AB$ das Entgegengesetzte BC der Geschwindigkeit u der Erde anzutragen, um in AC die scheinbare Geschwindigkeit w des Lichtes gegen das Fernrohr zu erhalten. Diese Richtung AC mufs das Rohr haben, damit der vom Stern S ausgehende Strahl das Fernrohr ungehindert durchlaufen kann, damit also der Stern S in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheine. Da man nun

Fig. 78.



gewohnt ist, einen im Fernrohr erblickten Gegenstand als in der Richtung des Fernrohres befindlich anzunehmen, so vermutet man S vielleicht an der Stelle S_1. Der Winkel φ, um den die scheinbare Richtung des Sternes von der wahren abweicht, heifst die Aberration des Lichtes. Die sekundl. Geschwindigkeit der Erde beträgt $29{,}7^{\text{km}}$, die des Lichtes $308\,000^{\text{km}}$, daher ist

$$\operatorname{tg}\varphi = 29{,}7 : 308\,000 = 0{,}000\,096.$$

Dieser Tangente entspricht ein Winkel von etwa $20''$.

Beispiel 3: Abschreiten eines vorüberfahrenden Baumstammes. Sieht man einen Baumstamm langsam und gleichmäfsig auf einer Strafse fahren, so kann man dessen Länge durch Abschreiten schätzen, indem man den Stamm einmal, ihn überholend, in der Fahrtrichtung abschreitet, ein zweites Mal gegen die Fahrtrichtung schreitet und für beide Fälle die Schritte zählt. Es empfiehlt sich hierbei, die Zeit eines Schrittes als Zeiteinheit zu wählen, dann ist die Schrittlänge zugleich die Geschwindigkeit v des Schreitenden. Mit u werde diejenige Strecke bezeichnet, welche der Stamm während eines Schrittes zurücklegt. Beim Überholen ist die scheinbare Geschwindigkeit des Schreitenden gegen den Stamm offenbar $v - u$. Ist nun t die Anzahl der Schritte beim Überholen, so mufs die Länge l des Stammes betragen $l = (v - u)\,t$. Beim Entgegenschreiten wird die scheinbare Geschwindigkeit $v + u$, daher $l = (v + u)\,t_1$, wenn t_1 die entsprechende Schrittzahl. Aus diesen beiden Gleichungen können u und l ermittelt werden, nämlich zu

$$u = v\,\frac{t - t_1}{t + t_1}; \qquad l = v\,\frac{t\,t_1}{{}^1\!/_2\,(t + t_1)}.$$

Der Schreitende mache in jeder Sekunde 2 Schritte von je $0{,}8^{\text{m}}$. Zum Überholen des Stammes gebrauche er $t = 100$ Schritte, zum Kreuzen nur $t_0 = 20$ Schritte, dann ist $\frac{u}{v} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$; während eines Schrittes von $0{,}8^{\text{m}}$ legt mithin der Baumstamm die Strecke $u = 0{,}8 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}533^{\text{m}}$ zurück. Die Länge des Stammes beträgt $l = 0{,}8 \cdot \frac{100 \cdot 20}{60} = 26{,}67^{\text{m}}$.

Fährt der Stamm schneller, als der Wanderer schreitet, so ist letzterer nicht im stande, den Stamm schreitend zu überholen, läfst sich vielmehr von dem Stamme während der Dauer von t Schritten überholen, kehrt dann laufend an das Vorderende des Stammes zurück und läfst ihn in entgegengesetzter Richtung während der Dauer von t_1 Schritten an sich vorbeifahren. In diesem Falle wird leicht gefunden:

$$\frac{u}{v} = \frac{t + t_1}{t - t_1}; \qquad l = v\,\frac{t t_1}{{}^1\!/_2\,(t - t_1)}.$$

Es sei jetzt $v = 0{,}75^{\text{m}}$; $t = 300$, $t_1 = 20$; dann wird $\frac{u}{v} = \frac{320}{280} = \frac{8}{7}$, mithin

$$u = 0{,}857^{\text{m}}; \quad l = 0{,}75 \cdot \frac{300 \cdot 20}{140} = 32{,}14^{\text{m}}.$$

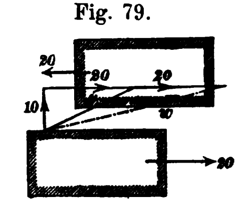
Beispiel 4: Ein Stein werde mit der geringen Geschwindigkeit $v = 10\ ^{m}/_{sek}$ senkrecht zur Fahrtrichtung gegen einen mit 20 $^{m}/_{sek}$ fahrenden Eisenbahnzug geworfen; dann ist die scheinbare Geschwindigkeit des Steines gegen den Zug

$$w = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5} = 22{,}361\ ^{m}/_{sek}.$$

Diese Geschwindigkeit ist mafsgebend für die Wirkung des Wurfes gegen einen etwa getroffenen Fahrgast, u. zw. ist das hierfür in Frage kommende Arbeitsvermögen $^1/_2\, m w^2 = {^1/_2}\, m \cdot 10^2 \cdot 5$, d. h. das 5fache der von dem Werfenden geleisteten Arbeit $^1/_2\, m v^2 = {^1/_2}\, m \cdot 10^2$ (S. 53).

In noch viel höherem Grade aber vervielfacht sich die Wirkung, wenn 2 Züge mit je 20 $^{m}/_{sek}$ aneinander vorbeifahren und der Stein aus dem einen Zuge gegen den anderen geworfen wird. Dann ist die wahre Geschwindigkeit des Steines die geometrische Summe aus der Seitengeschwindigkeit $c = 10\ ^{m}/_{sek}$, welche der Fahrgast dem Stein erteilt hat, und der Geschw. 20 $^{m}/_{sek}$ des ersten Zuges, d. h. $v = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5} = 22{,}361\ ^{m}/_{sek}$. Diesem v ist nun noch, wenn der zweite Zug nach links fährt (Figur 79), dessen Geschwindigkeit 20 $^{m}/_{sek}$ nach rechts hinzuzufügen. Dann wird w offenbar die Hypotenuse eines Dreiecks, dessen eine Kathete 10, dessen andere aber $20 + 20 = 40$ beträgt, also

Fig. 79.



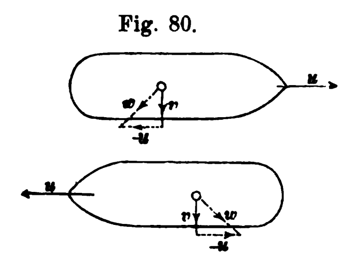
$$w = \sqrt{10^2 + 40^2} = 10\sqrt{1 + 16} = 10\sqrt{17} = 41{,}23.$$

Ein in dem zweiten Zuge befindlicher, etwa getroffener Fahrgast verspürt also eine Wurfwirkung von der Gröfse $^1/_2\, m w^2 = {^1/_2}\, m\, 10^2 \cdot 17$; d. h. durch die Bewegung der beiden Eisenbahnzüge ist die Stofswirkung auf das 17fache gewachsen, gegenüber dem Falle, wo der Stein aus einem stillstehenden Zug auf einen ebenfalls stillstehenden Zug geworfen würde. Die Geschwindigkeit von 10 $^{m}/_{sek}$ entspricht einer Fallhöhe von nur $100 \cdot 0{,}051 = 5{,}1$ m; ein Wurf mit solcher Geschwindigkeit ist daher als verhältnismäfsig harmlos zu bezeichnen. 41,23 $^{m}/_{sek}$ entsprechen aber einer Fallhöhe von $17 \cdot 5{,}1 = 86{,}7$ m, also einer Turmhöhe.

Beispiel 5: Fällt von einer über eine Eisenbahn führenden Brücke ein Stein lotrecht herab, so ist dessen wahre Bewegung eine lotrechte, gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Für einen vorbeifahrenden Zug aber wird die scheinbare Bewegung eiue parabolische Wurfbewegung, deren wagerechte Seitengeschwindigkeit das Entgegengesetzte der Geschwindigkeit des Eisenbahnzuges ist. Diese parabolische Bahnlinie wird ein im Zuge fahrender Beobachter wahrnehmen. Ähnlich ist es auch mit Regentropfen, die, lotrecht fallend, einen Zug treffen. Die Spuren derselben an den Fenstern und Wänden der Wagen werden von der Lotrechten abweichen. — Kann man, Kopf oder Hand aus einem Eisenbahnzuge hinaus haltend, keinen Luftzug wahrnehmen, so mufs die umgebende Luft die gleiche Bewegung wie der Zug haben, es mufs also ein in der Fahrrichtung wehender Sturm herrschen.

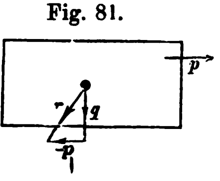
Beispiel 6: Stellung der Windfahne auf einem Schiff. Eine leicht bewegliche Windfahne, deren Stange ruht, wird durch die Luftbewegung in die Richtung des Windes gestellt. Ist die Stange aber nicht in Ruhe, so kommt für die Stellung der Fahne die scheinbare oder relative Geschwindigkeit der Luft in Bezug auf die Fahnenstange in Frage. Bewegt sich ein Dampfschiff mit 5 m/sek und weht rechtwinklig dazu ein Wind von gleicher Geschwindigkeit (Fig. 80), so ist die scheinbare Geschwindigkeit $w = 5\sqrt{2}$ und um 45° geneigt gegen die wahre Windrichtung. In der Richtung von w wird die Fahne sich einstellen. Man kann daher auf einem fahrenden Schiff aus der Richtung der Windfahne nicht ohne weiteres auf die Windrichtung schliefsen. Bei einem entgegengesetzt fahrenden Schiffe würde die Abweichung nach der anderen Seite erfolgen, und unter den bezüglich der Geschwindigkeiten gemachten Annahmen würden die Fahnen auf den beiden sich begegnenden Schiffen rechtwinklig zu einander stehen.

Fig. 80.



Beschleunigung der scheinbaren Bewegung. Ist q die wahre Beschleunigung eines Punktes (Fig. 81), so ergibt sich die scheinbare Beschleunigung r als geometrische Summe von q und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p des betreffenden Raumes.

Fig. 81.



Die wahre Beschleunigung q ist die Wirkung einer wahren Kraft $K = mq$; die scheinbare Beschleunigung r kann als die Wirkung einer scheinbaren Kraft mr angesehen werden, die man offenbar erhält als geometrische Summe der wahren Kraft K und einer Kraft $(-mp)$, welche dem Entgegengesetzten der Beschleunigung des Raumes entspricht. Diese Kraft, welche man zu der wirklichen hinzufügen mufs, um die scheinbare Kraft zu erhalten, nennt man **Ergänzungskraft der scheinbaren Bewegung.**

Fig. 82.

Bewegt sich der Massenpunkt unter Einwirkung der Schwere in einem Raume (Kasten), der selbst eine Beschleunigung p (Fig. 82) lotrecht aufwärts erfährt, so ist g die wahre Beschleunigung des Punktes; zu dieser mufs man p abwärts hinzufügen, um als Summe beider die scheinbare Beschleunigung $r = g + p$ zu erhalten.

Die scheinbare Kraft ist $R = m(g + p)$. Soll aber der Punkt verhindert werden, in dem Raume zu fallen, etwa dadurch, dafs man ihn an einem Faden aufhängt, so mufs die Spannkraft S des Fadens die scheinbare Kraft R aufheben, es mufs also $S = m(g + p)$ sein. (Ebenso grofs würde der Gegendruck des Bodens sein, wenn der Massenpunkt auf dem Boden des Kastens läge.) Ist die Beschleunigung p des Kastens Null, so ist S einfach gleich dem Gewichte des Punktes. Die Beschleunigung des Kastens hat auf die scheinbare Bewegung denselben Einflufs, als ob die Fallbeschleunigung von g auf $r = g + p$ erhöht wäre. Wird der an dem Faden hängende Punkt durch eine seitliche Bewegung aus der scheinbaren Ruhelage gebracht, so führt er Pendelschwingungen aus, und die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung berechnet sich, indem man in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (S. 78) g mit $g + p$ vertauscht, zu

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g + p}}.$$

Die Schwingungen erfolgen also wegen der stärkeren Beschleunigung in kürzerer Zeit.

Ist die Beschleunigung p des Kastens nach unten gerichtet, so wird $r = g - p$; $R = m\ (g - p)$ und ein etwaiger Bodendruck oder eine etwaige Fadenkraft ebenfalls $m\ (g - p)$. Die Schwingungsdauer des Pendels wird jetzt

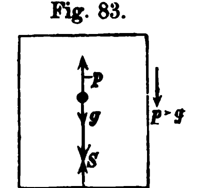
$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g - p}}.$$

Bewegt sich der Kasten mit der Fallbeschleunigung $p = g$ abwärts, so wird $r = 0$; $R = 0$; der Punkt hat keine scheinbare Beschleunigung gegen den Kasten (da beide gleiche Beschleunigung g haben). Bodendruck oder Fadenkraft werden Null; der Punkt drückt nicht mehr auf den Boden. Ein in dem Kasten befindlicher Mensch würde den Boden unter den Füfsen verlieren. Da die Fadenkraft Null wird, ist auch ein Pendel nicht möglich; die Schwingungsdauer wird dann auch $t = \infty$, d. h. es kommt eine Schwingung nicht zu stande.

Ist aber die abwärts gerichtete Beschleunigung des Kastens $p > g$, so wird (Fig. 83) die scheinbare Beschleunigung $r = p - g$

nach aufwärts gerichtet; der Massenpunkt fällt in dem Kasten nach oben. Ein etwaiger Deckendruck bezw. eine Fadenkraft S wird $m(p - g)$, wobei der Faden an dem Boden befestigt sein mufs. Bei einem seitlichen Anstofs entstehen Schwingungen um den unteren Befestigungspunkt, u. zw. von der Dauer

Fig. 83.

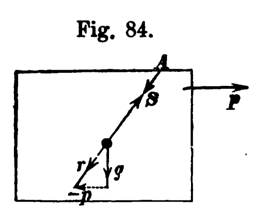


$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{p - g}}.$$

Das in diesen verschiedenen Fällen über die Spannkraft S des Fadens Gesagte gilt auch, wenn ein Kasten gar nicht vorhanden ist, wenn man vielmehr etwa mit der Hand das eine Ende des Fadens erfafst, während an dem andern Ende ein Massenpunkt angeschlossen ist. Bewegt man die Hand nach irgend einer Richtung gleichförmig und geradlinig, so ist die Spannkraft des stets lotrechten Fadens gleich dem Gewichte des angehängten Massenpunktes. Bewegt man die Hand aber mit aufwärts gerichteter Beschleunigung, so vergröfsert sich die Spannkraft, und es kann infolge dieser Beschleunigung der Faden möglicherweise reifsen. Will man in solchen Fällen das Reifsen eines etwas schwachen Fadens oder Seiles vermeiden, so mufs die Bewegung eine vorsichtige sein, d. h. eine solche ohne wesentliche Beschleunigung.

Ist der Kasten ein in wagerechtem Sinne beschleunigter Eisenbahnwagen mit der Beschleunigung p, so wird die scheinbare Beschleunigung $r = \sqrt{g^2 + p^2}$ schräg gerichtet; ebenso die scheinbare Kraft $R = mr$ (Fig. 84). Soll der Massenpunkt durch einen aufhängenden Faden in scheinbarer Ruhe in dem Wagen erhalten werden, so mufs die Fadenspannkraft $S = m\sqrt{g^2 + p^2}$ in die Richtung von r fallen. Um diese scheinbare Gleichgewichtslage als Mitte würden bei einem Anstofse Pendelschwingungen von der Dauer $t = \pi \sqrt{\frac{l}{r}}$ entstehen. Die Richtung von r gibt zugleich die Stellung an, welche ein Fahrgast annehmen mufs, um nicht umzufallen, wenn der Wagen eine nach rechts gerichtete beschleunigte Bewegung hat, oder wenn der nach links fahrende Wagen beim Anhalten eine Verzögerung p erfährt.

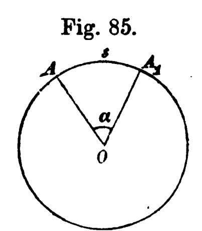
Fig. 84.



19. Ruhe in Bezug auf einen sich gleichmäfsig drehenden Raum.

Dreht sich ein Körper um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene, Fig. 85), so ist die Bewegungsart schon durch die Bewegung eines einzigen Punktes oder auch eines beliebigen Drehungshalbmessers OA bestimmt. Der beliebige Punkt mufs sich in einer Kreislinie bewegen, und wenn $AA_1 = s$ die während der Zeit t zurückgelegte Wegeslänge ist, so wird $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz sein, welches die Kreisbewegung des Punktes A im Abstand $OA = r$ von der Drehachse und damit auch die Drehbewegung des Körpers völlig bestimmt. Es ist dann $v = ds:dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A. Setzt man nun $s = AA_1 = r\alpha$, so wird $\alpha = {}^1\!/_r \cdot f(t)$ oder $\alpha = \varphi(t)$ das Gesetz der Drehbewegung des Halbmessers OA. Ebenso wie man $v = ds:dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A nennt, heifst $\omega = d\alpha : dt = \varphi'(t)$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, d. h. der auf die Zeiteinheit (Sekunde) bezogene Drehungswinkel oder die Umfangsgeschwindigkeit im Abstand Eins von der Drehachse. Wie $s = r\alpha$ ist auch $v = r\omega$ und $\omega = v:r$.

Fig. 85.



Beispiel: Dreht sich ein Körper in jeder Sekunde einmal gleichförmig um seine Achse, so beschreibt ein Punkt im Abstand r von der Achse den Weg $2r\pi$ in jeder Sekunde, mithin ist $v = 2r\pi$; ein Punkt im Abstand $r = 1$ also hat die Geschwindigkeit $\omega = v:r = 2\pi$; oder man kann auch sagen: Der Winkel 2π einer ganzen Umdrehung wird in jeder Sekunde zurückgelegt daher ist $\omega = 2\pi$. Die Gradzahl eines Winkels ist nicht ein natürliches sondern ein künstliches, willkürliches Mafs für die Gröfse desselben. Die natürliche Einheit des Winkels ist derjenige Winkel α, dem bei einem Halbmesser Eins eine Bogenlänge Eins entspricht. Da nun einem Winkel von 180° nach dem meist üblichen Gradmafs eine halbe Umdrehung, d. h. ein Bogen π entspricht, so wird der Bogeneinheit eine Gradzahl $180:\pi = 57{,}3$ entsprechen. Dafs dieser Winkel etwas unter 60° liegen mufs, ergibt sich daraus, dafs beim Winkel von 60° die Sehne gleich dem Halbmesser, der Bogen also etwas gröfser als der Halbmesser ist.

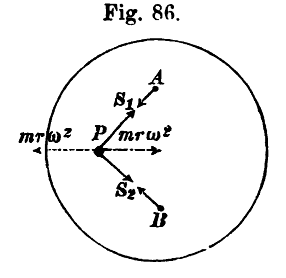
Dreht sich ein Raum gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse und befindet sich in dem Raum ein Massenpunkt, und zwar in dem Abstand r von der Achse, in

scheinbarer (relativer) Ruhe gegen den Raum, so macht er die Bewegung des Raumes tatsächlich mit, führt mithin eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ aus, wobei er (nach S. 61) eine Zentripetalbeschleunigung

$$1)\qquad \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

erfährt. Dazu ist dann eine Zentripetalkraft von der Gröfse $mr\omega^2$ erforderlich. Liegt z. B. auf einer wagerechten Scheibe, die sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre lotrechte Achse dreht (Fig. 86), ein Massenpunkt, etwa eine kleine Kugel, so wird diese zur scheinbaren Ruhe gegen die Scheibe nur durch Kräfte gezwungen werden können, etwa durch die Spannkräfte S_1 und S_2 zweier bei A und B mit der Scheibe verbundenen Fäden. S_1 und S_2 werden dann so grofs, dafs ihre Mittelkraft von der Gröfse $mr\omega^2$ und nach dem Mittelpunkt O gerichtet ist. Hierdurch sind S_1 und S_2 völlig bestimmt.

Fig. 86.



Diese Bedingung für die scheinbare Ruhe kann aber auch in ähnlicher Weise ausgedrückt werden wie die Bedingung für scheinbare Ruhe im fortschreitenden Raume. Haben nämlich die auf den Punkt wirkenden Kräfte S_1 und S_2 die Mittelkraft $mr\omega^2$, so würde das Entgegengesetzte dieser Kraft, d. h. eine radial nach aufsen gerichtete Kraft $-mr\omega^2$, mit S_1 und S_2 im Gleichgewichte sein. Diese zu den wirklichen Kräften S_1 und S_2 hinzuzufügende Kraft $-mr\omega^2$, welche mit ihnen im Gleichgewichte sein mufs, entspricht dann genau der Ergänzungskraft $-mp$ (S. 84); sie ist, wie diese, keine wirklich vorhandene Kraft, sondern nur eine gedachte Ergänzungskraft der scheinbaren Bewegung bezw. Ruhe und heifst wegen ihrer Richtung Zentrifugalkraft. Nach ihrer Hinzufügung ist dann die Bedingung für den scheinbaren Ruhezustand dieselbe wie für wirkliche Ruhe, nämlich Gleichgewicht der Kräfte. Nur mufs man sich hüten, die Zentrifugalkraft als eine wirkliche Kraft anzusehen. In dem Falle der Figur 86 ist ja auch durchaus kein Körper nachzuweisen, der den Punkt mit der Kraft $mr\omega^2$ nach aufsen triebe, vielmehr sind nur

die Fadenkräfte wirksam, die den Punkt hindern, sich von dem Mittelpunkt O weiter zu entfernen. Durchschnitte man die Fäden plötzlich, so würde der Punkt sich auch nicht etwa radial nach aufsen bewegen, sondern vielmehr tangential zu seiner bisherigen Kreisbahn mit der Geschwindigkeit v weiter gehen.

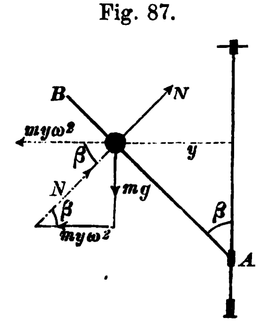
Von einer zum Schleifen dienenden, schnell umlaufenden Schmirgelscheibe fliegen die abgelösten, glühenden Metallteilchen in tangentialer Richtung fort. Läfst man die Schnur einer Schleuder los, so fliegt der Stein aus derselben in tangentialer Richtung weiter.

Die Zentrifugalkraft ist nur eine Hülfsvorstellung zur Vereinfachung mancher Untersuchungen.

Soll ein Massenpunkt gegen einen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig drehenden Raum bei einem Abstand r von der Drehachse in scheinbarer Ruhe verbleiben, so müssen die auf ihn wirkenden Kräfte sich mit der als Ergänzungskraft hinzuzufügenden Zentrifugalkraft $mr\omega^2$ im Gleichgewichte halten.

Beispiel: An einer lotrechten Achse (Fig. 87) befinde sich ein schräger Arm AB aus Draht, auf welchem eine kleine Kugel verschiebbar sei. Wirkt auf die Kugel die Schwere mg, so übt der Draht den Normalwiderstand N aus. Beide können sich aber allein nicht im Gleichgewichte halten, sondern es wird unter ihrer Einwirkung die Kugel auf dem Drahte beschleunigt abwärts gleiten. Erteilt man jedoch der Achse und damit auch dem Arm eine Winkelgeschwindigkeit ω, so ist es nun möglich, dafs die Kugel auf dem Arme sich nicht verschiebe. Die Bedingung dafür besteht darin, dafs nach Hinzufügung der Zentrifugalkraft $my\omega^2$ zu den Kräften mg und N Gleichgewicht herrsche. Diese drei Kräfte bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse rechtwinklig zum Arme steht, also mit der Wagerechten den Winkel β bildet.

Fig. 87.



Daher mufs $\operatorname{tg}\beta = mg : my\omega^2$ oder

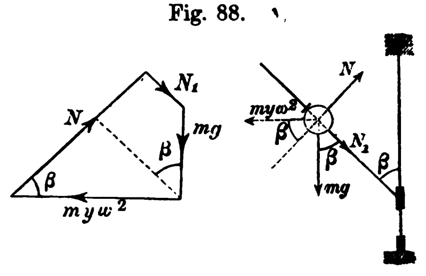
$$2)\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{g}{y\omega^2} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{y\operatorname{tg}\beta}} \quad \text{oder} \quad y = \frac{g}{\omega^2\operatorname{tg}\beta} \quad \text{sein.}$$

Ist z. B. $\beta = 45^\circ$, $\operatorname{tg}\beta = 1$, $\omega = 2\pi$ (1 Umdrehung in der Sekunde), so ergibt sich $y = \frac{9{,}81}{1 \cdot 4\pi^2} = 0{,}25$ m; d. h. in 0,25 m Abstand von der Achse

würde die Kugel nunmehr auf dem Arm in scheinbarer Ruhe verbleiben. Zu jedem anderen Wert y gehört aber auch ein anderes ω bei sonst gleich bleibenden Verhältnissen.

Um zu erkennen, wie die Kugel sich bei gröfserer Winkelgeschwindigkeit, als Gl. 2 entspricht, bewegen würde, denken wir uns (Fig. 88) dicht oberhalb der Kugel einen Vorsteckstift angebracht, der eine Vergröfserung von y verhindert. Dieser Stift übt dann einen Widerstand N_1 in der Richtung des Armes nach unten aus, und es müssen sich nun die Kräfte N, N_1, mg und $my\omega^2$ aufheben. Zerlegt man sämtliche Kräfte in solche, welche in die Richtung des Armes fallen bezw. dazu rechtwinklig stehen, so mufs die Kräftesumme in der Armrichtung Null sein, d. h.

Fig. 88.



$$N_1 + mg\cos\beta - my\omega^2\sin\beta = 0,$$

mithin

$$N_1 = my\omega^2\sin\beta - mg\cos\beta$$

$$= mg\cos\beta\left(\frac{y\,\omega^2\,\mathrm{tg}\,\beta}{g} - 1\right).$$

Ist nun $\omega^2 > \frac{g}{y\,\mathrm{tg}\,\beta}$, so wird $y\omega^2\,\mathrm{tg}\,\beta > g$ und $N_1 > 0$; d. h. der Stift leistet der Kugel tatsächlich einen Gegendruck; mithin drückt die Kugel nach dem Gesetze der Wechselwirkung auch gegen den Stift, würde also, falls der Stift fehlte, auf dem Arme nach oben gleiten. Der Stiftdruck wird Null, wenn $y\omega^2\,\mathrm{tg}\,\beta = g$, während ein kleineres ω ein negatives N_1, d. h. den nach oben gerichteten Widerstand eines unterhalb der Kugel angebrachten Stiftes verlangt, entsprechend der Neigung der Kugel, abwärts zu gleiten. Hiermit ist zugleich bewiesen, dafs sich beim Kegelpendel (S. 69) der Neigungswinkel gegen die Lotrechte vergröfsern wird, wenn man dem Massenpunkt eine zu grofse Geschwindigkeit v gibt, und umgekehrt. Denn die jetzt betrachtete Anordnung ist dem Wesen nach auch ein Kegelpendel.

Tritt an Stelle des geraden Armes ein nach einem Kreisbogen vom Halbmesser l geformter (Fig. 89), so behält Gl. 2 ihre Gültigkeit; es ist

$$\mathrm{tg}\,\beta\cdot y\omega^2 = g, \text{ oder, weil}$$

$$y = l\cos\beta \text{ und } \beta = 90^0 - \alpha,$$

$$\sin\beta\, l\omega^2 = h\omega^2 = g \text{ und } h = g : \omega^2,$$

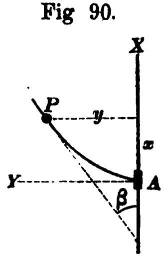
worin h die Tiefe der Kugel unter O bedeutet; h ändert sich im umgekehrten Verhältnisse mit ω^2. Diese Vorrichtung wird als **Schwungkugel-Regler** (Zentrifugal-Regulator) zur Regelung des Ganges von Maschinen benutzt. An der lotrechten Achse werden bei O zwei Gelenkstangen von der Länge l befestigt, welche die Kugeln tragen und ihnen

Fig. 89.

zugleich die Kreisbahn CBC_1 vorschreiben. Bei einer Winkelgeschwindigkeit ω wird sich dann die Höhe $h = g : \omega^2$ bilden. Bei gröſserer Drehgeschwindigkeit werden die Kugeln steigen, und umgekehrt. Durch geeignetes Gestänge wirkt das Steigen bezw. Sinken der Kugeln auf die Kraftquelle, vermindert bezw. verstärkt dieselbe.

Soll die Kugel bei gleichbleibender Umdrehungsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Armes in scheinbarer Ruhe verbleiben können, so muſs die Form des Armes eine solche sein, daſs die Gl. 2 S 89: $\operatorname{tg} \beta \cdot y\,\omega^2 = g$ für jeden Wert von y Gültigkeit hat. Es muſs also offenbar $\operatorname{tg} \beta$ mit y umgekehrt sich ändern. Bezieht man (Fig. 90) die gesuchte Kurve AP auf den Punkt A als Anfangspunkt, so ist $\operatorname{tg} \beta = dy : dx$, mithin $y\omega^2 \cdot dy : dx = g$ oder $2\,\omega^2 y\,dy = 2g \cdot dx$. Sind zwei Differentiale einander gleich, so dürfen sich deren unbestimmte Integrale nur um eine Konstante C unterscheiden, und man erhält

Fig 90.



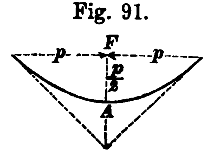
$$\omega^2 y^2 = 2gx + C.$$

Weil aber der Punkt A mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ auch der Kurve angehört, so muſs die Konstante in obiger Gleichung so bestimmt werden, daſs für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Das gibt

$$0 = 0 + C \text{ oder } C = 0, \text{ und nach } y^2 \text{ aufgelöst: } y^2 = 2\left(\frac{g}{\omega^2}\right)x.$$

Diese Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt und deren Parameter $g : \omega^2$ ist. Für bestimmtes g entspricht jeder Drehgeschwindigkeit ω eine bestimmte Parabel als Gleichgewichtsform. Ist die der Form entsprechende Drehgeschwindigkeit vorhanden, so kann die Kugel an jeder Stelle des Drahtes in scheinbarer Ruhe verbleiben, ist die Geschwindigkeit $> \omega$, so strebt die Kugel fortgesetzt nach auſsen, und umgekehrt.

Fig. 91.



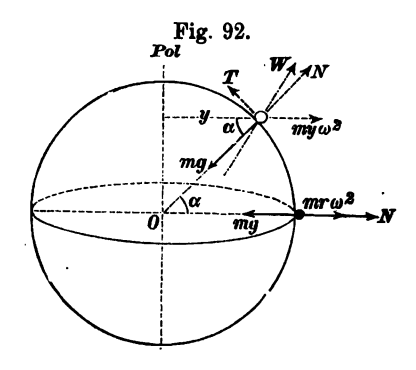
Dreht sich die Achse mit dem Arm in jeder Sekunde 1 Mal um, so ist $\omega = 2\pi$ und der Parameter der Parabel $p = 9{,}81 : (4\pi^2) = 0{,}25^{m}$ (Fig. 91).

20. Einfluſs der Drehung der Erde um ihre Achse auf das scheinbare Gewicht bezw. die scheinbare Fallbeschleunigung.

Denken wir uns die Erde vorläufig als Kugel vom Halbmesser $r = 6370000^{m}$ und betrachten wir einen Massenpunkt, der am Äquator auf der Erdoberfläche ruht, so ist dieser Zustand nur ein

scheinbarer Ruhezustand in Bezug auf die sich drehende Erde (Fig. 92). Zu der Anziehungskraft mg der Erde und dem nach aufsen gerichteten Normalwiderstand N der Erdoberfläche mufs daher noch die Zentrifugalkraft $mr\omega^2$ hinzugefügt werden, damit Gleichgewicht entstehe. Daher ist $N = mg - mr\omega^2$. Nun wird aber das Gewicht eines Körpers nach dem Drucke beurteilt, den er im Ruhezustand auf eine wagerechte Unterlage (die Wagschale) ausübt, so dafs N als das scheinbare Gewicht und $N:m$ als die scheinbare Fallbeschleunigung g_0 in der geographischen Breite Null zu bezeichnen ist, also

Fig. 92.



$$g_0 = g - r\omega^2.$$

Die Zeit einer Umdrehung der Erde beträgt

$$23^{\text{std}}\,56^{\text{min}}\,4^{\text{sek}} = 86164^{\text{sek}};$$

daher $\omega = 2\pi : 86164 = 0{,}000073$, hiernach wird

$$r\omega^2 = 6370000 \cdot 0{,}000073^2 = 0{,}034.$$

Nun ist die scheinbare Fallbeschleunigung am Äquator durch Pendelbeobachtungen (s. S. 78) zu $g_0 = 9{,}780\,{}^{\text{m}}/_{\text{sek}^2}$ beobachtet, daher wird

$$g = 9{,}780 + 0{,}034 = 9{,}814$$

die wahre Beschleunigung der Schwere am Äquator, welche bei kugelförmiger Erde für alle Punkte der Erdoberfläche gelten würde.

In einer geographischen Breite α halten sich nun an dem Massenpunkte die Schwere mg, die Zentrifugalkraft $my\omega^2$ mit dem Gegendrucke W der Erdoberfläche im Gleichgewichte, woraus folgt, dafs W im allgemeinen nicht durch den Erdmittelpunkt O geht. Zerlegt man W in einen Normalwiderstand N und einen Tangentialwiderstand T, so wird, weil $y = r\cos\alpha$,

$$N = mg - mr\omega^2\cos^2\alpha = m(g - r\omega^2\cos^2\alpha) \quad \text{und}$$

$$T = mr\omega^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Von diesen beiden Seitenkräften ist $N \geqq m\,(9{,}814 - 0{,}034)$ oder $N \geqq m \cdot 9{,}78$, dagegen $T \leqq m \cdot 0{,}034 \cdot {}^1/_2$ (für $\alpha = 45^0$), daher $N:T \geqq 575$. Da nun N und T die Katheten, W die Hypotenuse

eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, so ist die Hypotenuse W bei solchem Verhältnisse von $N:T$ mit grofser Annäherung gleich N zu setzen. W bedeutet aber wiederum die scheinbare Schwere und $W:m$ die scheinbare Fallbeschleunigung g_α in der geographischen Breite α; mithin ist

$$g_\alpha = g - r\omega^2 \cos^2 \alpha = g - r\omega^2 + r\omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Da nun $g - r\omega^2 = g_0 = 9{,}780$, so wird

$$2) \qquad g_\alpha = 9{,}780 + 0{,}034 \sin^2 \alpha = 9{,}797 - 0{,}017 \cos 2\alpha,$$

wenn man die Beziehung $\sin^2 \alpha = 1/2 - 1/2 \cos 2\alpha$ benutzt.

Die scheinbare Schwere W würde auch nach Richtung und Gröfse die Spannkraft eines Fadens bilden, an welchem ein Massenpunkt etwa als Lot aufgehängt wäre. Da nun W im allgemeinen nicht mit der Normalen N zusammenfällt, so geht auch die Richtung des Lotes im allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt der Erde, nur am Äquator und an den Polen, wo $T = mr\omega^2 \cdot 1/2 \sin 2\alpha = 0$ ist, findet dies statt.

Für den Winkel δ, um den das Lot von der Geraden nach dem Mittelpunkte der Erde abweicht, gilt

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{T}{N} = \frac{mr\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha}{mg_\alpha}$$

$$= \frac{0{,}034 \sin\alpha \cos\alpha}{9{,}797 - 0{,}017 \cos 2\alpha} = \frac{0{,}017 \sin 2\alpha}{9{,}797 - 0{,}017 \cos 2\alpha}.$$

Will man wissen, in welcher Breite α dieses ein Maximum wird, so setzt man die Abgeleitete von $\operatorname{tg} \delta$ gleich Null, mithin

$$0 = (9{,}797 - 0{,}017 \cos 2\alpha) \cdot 0{,}034 \cos 2\alpha - 0{,}017 \sin 2\alpha \cdot 0{,}034 \sin 2\alpha, \text{ oder}$$

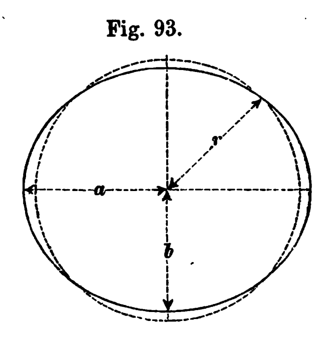
$$9{,}797 - 0{,}017 \cos 2\alpha = 0{,}017 \sin 2\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$$

und daraus $\cos 2\alpha = \frac{0{,}017}{9{,}797} = 0{,}001\,735$. Das gibt $2\alpha = 89^\circ 54'$ und $\alpha = 44^\circ 52'$.

Wäre die Erde vollkommen kugelförmig, so könnte ihre Oberfläche einen von der Normalen abweichenden Widerstand W gar nicht leisten; die Seitenkraft T, welche für den scheinbaren Ruhezustand erforderlich wäre, könnte von ihr nicht ausgeübt werden; es würden daher alle leicht beweglichen Körper, namentlich die Wasserteilchen des Meeres nach dem Äquator fortgleiten, bis die Kugelform sich so geändert haben würde, dafs W rechtwinklig zur Oberfläche steht. Diese Formänderung findet aber nicht mehr statt, weil die Gestalt der Erde eben keine Kugel ist, sondern ein Ellipsoid, welches jener Bedingung, dafs die Richtung des Lotes rechtwinklig

zur Oberfläche steht, entspricht (Fig. 93). Der Erdhalbmesser $a = 6377000^{m}$ am Äquator ist etwa 21^{km} gröfser als der Polradius $b = 6356000^{m}$. Infolge dieses Umstandes wird ein Massenpunkt, wenn man ihn vom Äquator her nach dem Pole verschiebt, dem Mittelpunkte der Erde näher kommen, woraus allein schon eine Zunahme der Anziehung folgt, deren Einflufs jene andere Zunahme noch verstärkt, die infolge der Abnahme der Wirkung der Zentrifugalkraft sich ergibt. Pendelversuche haben ergeben, dafs man in Gl. 2 (S. 93) die Zahlenwerte ändern mufs, um sie mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bringen; es ist nämlich tatsächlich

Fig. 93.



$$3)\qquad g_\alpha = 9{,}780 + 0{,}052 \sin^2\alpha = 9{,}806 - 0{,}026 \cos 2\,\alpha.$$

$$\alpha = 0 \quad \text{gibt} \quad g_0 = 9{,}780$$
$$\alpha = 45^0 \quad " \quad g_{45} = 9{,}806$$
$$\alpha = 90^0 \quad " \quad g_p = 9{,}832 \text{ (am Pole).}$$

Für Hannover ist $\alpha = 52^0\,23'$, daher $g_\alpha = 9{,}813$.

Da wir das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4° C.) unter 45° geographischer Breite als Krafteinheit (Kilogramm) bezeichnet haben, so beträgt das Gewicht dieses Körpers am Äquator

$$9{,}780 : 9{,}806 = 0{,}997^{kg}, \text{ am Pole } 9{,}832 : 9{,}806 = 1{,}003^{kg}.$$

Vorstehende Formeln und Zahlen gelten für die Höhe des Meeresspiegels. Die Fallbeschleunigung in einer Höhe von h Metern über dem Meeresspiegel wird dann genau genug gefunden, indem man nach S. 58 die vorstehenden Werte noch mit $(1 - 2\,h : r)$, oder, wenn man $r = 6370000^{m}$ setzt, mit $1 - 0{,}00000032\,h)$ multipliziert. Dann wird (genau genug) $g_\alpha = 9{,}806 - 0{,}026 \cos 2\,\alpha - 0{,}000003\,h$. Auf dem Brocken unter $51^0\,50'$ geographischer Breite und in etwa 1140^{m} Meereshöhe ist $g_\alpha = 9{,}809$, in Ilsenburg am Fufse des Brockens (260^{m} Meereshöhe) 9,811. Der Unterschied ist also nur gering.

Zweite Abteilung.

Mechanik starrer Körper.

---

1. Einleitung.

Einen Körper denken wir uns als aus sehr vielen Massenpunkten zusammengesetzt, die so miteinander in Verbindung stehen, dafs sie gegenseitig auf ihre Bewegung einzuwirken verstehen, dafs sie also gegenseitig Kräfte aufeinander ausüben können. Diese Kräfte, mit welchen die einzelnen Massenpunkte eines Körpers gegenseitig aufeinander einwirken, heifsen innere Kräfte des Körpers, im Gegensatze zu den äufseren Kräften, welche von anderen Körpern herrühren.

Die Verbindung zwischen den einzelnen Massenpunkten ist bei verschiedenen Körpern eine verschiedenartige. Wir haben zunächst feste Körper zu unterscheiden von nicht festen Körpern. Bei den festen Körpern setzen die einzelnen Massenpunkte einer jeden Änderung der Form des Körpers einen Widerstand entgegen. Die nicht festen Körper heifsen flüssige Körper, zu denen im besonderen auch die gasförmigen Flüssigkeiten zu rechnen sind. Bei diesen zeigen die Massenpunkte keinen Widerstand gegen Formänderung im allgemeinen, sondern im wesentlichen nur einen solchen gegen Zusammendrängung auf einen kleineren Rauminhalt.

Denkt man sich die Massenpunkte eines festen Körpers derartig miteinander verbunden, dafs die inneren Kräfte jede, auch noch so geringe Formänderung, um so mehr also gar eine Zerstörung, verhindern, so gelangt man zu dem Begriffe vollkommen fester oder starrer Körper. Solche starren Körper gibt es in Wirklichkeit nicht; vielmehr erleidet jeder wirkliche feste Körper unter Einwirkung äufserer Kräfte eine gewisse Formänderung, deren Art und Gröfse von den äufseren Kräften und von der Beschaffenheit des Körpers abhängt. Die inneren Kräfte treten bei äufseren Einwirkungen in Wirklichkeit mit allmählich zunehmender Gröfse auf,

und erst nach dem Eintreten einer gewissen Formänderung sind sie zu solcher Gröfse angewachsen, dafs sie nun eine weitere Änderung verhindern können. Überschreitet aber die Gröfse der äufseren Kräfte gewisse Grenzen, so tritt eine Zerstörung des Körpers ein. Diese wirklich vorkommenden festen Körper nennt man, im Gegensatze zu den nur gedachten starren Körpern, elastisch feste Körper. Den Unterschied beider kann man sich grobsinnlich vorstellen, indem man (Fig. 94) zwei Kugeln das eine Mal durch eine steife Stange, das andere Mal durch eine nachgiebige Schraubenfeder verbunden denkt. Sucht man mit den Händen die Entfernung der beiden Kugeln zu verändern, so wird dies in dem ersten Falle durch die inneren Kräfte verhindert, in dem zweiten nur in gewissem Grade erschwert.

Fig. 94.

Bei sehr vielen Anwendungen der Mechanik hat nun die Ermittelung der Formänderung eines Körpers oder die Frage nach seiner Festigkeit keinen Wert. In solchen Fällen kann man daher zur Vereinfachung der Aufgaben die Körper als starre betrachten. In anderen Fällen aber wird gerade nach der Festigkeit und der Formänderung der Körper gefragt; dann mufs man sie als elastisch fest behandeln. Es wird sich aber zeigen, dafs man sehr viele Ergebnisse der Mechanik starrer Körper in der Mechanik elastisch fester Körper verwerten kann.

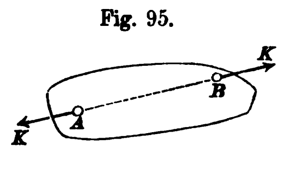
2. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte.

Die Zusammensetzung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte ist bereits in Abteilung I Ziffer 6 erörtert. Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich die dort angegebenen Regeln auch dann anwenden, wenn die zu einer Mittelkraft zu vereinigenden Kräfte nicht unmittelbar einen gemeinsamen Angriffspunkt haben. Wir stützen uns dann auf folgenden, ohne weiteres einleuchtenden und mit der Erfahrung völlig übereinstimmenden

Grundsatz: Zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte, deren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen, und die in zwei beliebigen Punkten dieser Geraden an

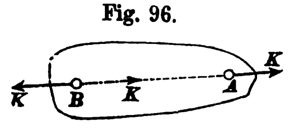
einem starren Körper angreifen, haben auf die Bewegung des Körpers keinen Einflufs, heben sich gegenseitig auf, halten sich im Gleichgewicht und umgekehrt, sollen zwei Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen, so müssen sie gleich und entgegengesetzt gerichtet sein und mit ihren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. (Fig. 95.)

Fig. 95.



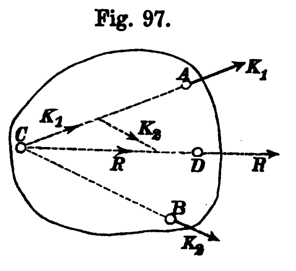
In der Mechanik des Massenpunktes war eine Kraft durch Gröfse, Richtung und Sinn gegeben; jetzt kommt aber auch noch diejenige Stelle des Körpers in Betracht, an welcher die Kraft angreift. Bei Kräften am starren Körper genügt statt dessen schon die Kenntnis irgend eines Punktes der Richtungslinie einer Kraft, oder ihre Lage, zur Beurteilung ihrer Wirkung, da man jeden Punkt der Richtungslinie einer Kraft als ihren Angriffspunkt behandeln kann Denn: greift eine Kraft K (Fig. 96) an dem Punkt A eines Körpers an und ist B ein beliebiger, demselben starren Körper angehöriger Punkt der Richtungslinie von K, so kann man an dem Massenpunkte B zwei in die Gerade AB fallende, entgegengesetzte Kräfte K anbringen, ohne im Bewegungszustande des Körpers etwas zu ändern. Da aber nach dem vorstehenden Satze die in A angreifende Kraft K mit der entgegengesetzten im Punkte B sich aufhebt, so bleibt als gleichwertig mit der ursprünglich gegebenen die in B angreifende Kraft gleicher Gröfse, Richtung und gleichen Sinnes übrig.

Fig. 96.



Zusammensetzung zweier Kräfte mit sich schneidenden Richtungslinien. Die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 (Fig. 97) mit den Angriffspunkten A und B lassen sich nach vorstehendem Satz an den Schnittpunkt C der Richtungslinien verlegen und lassen sich hier durch eine Mittelkraft R nach der Lehre über die Zusammensetzung der Kräfte am einfachen Punkt ersetzen. Diese

Fig. 97.



Mittelkraft R darf dann aber wiederum als in irgend einem Punkte D ihrer Linie eingreifend gedacht werden. Dabei ist es gleichgültig, ob der Schnittpunkt C der Kraftlinien dem Körper angehört oder nicht, weil die in D angreifende Kraft R den gegebenen K_1 und K_2 in A und B völlig gleichwertig ist.

Ist aber der Schnittpunkt C der Kraftlinien wegen ungünstiger Lage nicht benutzbar, so kann man Gröfse, Richtung und Sinn der Mittelkraft R leicht finden, indem man das vorhin bei C gezeichnete Krafteck in A, in B oder an einer beliebigen Stelle zeichnet; zur Auffindung der richtigen Lage von R, die oben durch C bestimmt war, kann man entweder geometrische Beziehungen benutzen, oder mit besonderem Vorteil einen Satz der Mechanik, den wir jetzt entwickeln wollen, nämlich den Satz der statischen Momente von Kräften.

3. Satz der Drehmomente der Kräfte.

Ist K eine in der Bildebene wirkende Kraft, O eine Achse rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 98), so dafs also Kraftlinie und Achse sich im Raume rechtwinklig kreuzen; dann nennt man das Produkt Kraft mal Hebelarm oder Kl das Drehmoment oder statische Moment der Kraft in Bezug auf die Achse O. Der Hebelarm ist die rechtwinklige Entfernung der Kraft von der Achse.

Fig. 98.

Momentum ist (wahrscheinlich) eine Abkürzung von Movimentum und bedeutet Bewegungsmittel: Drehmoment bedeutet also „Mittel zur Erzeugung einer Drehbewegung“.

Greifen an demselben Massenpunkt A mehrere in der Bildebene liegende Kräfte K_1 und K_n an, deren Mittelkraft R ist (Fig. 99), und sind l_1, l_n, l die bezüglichen Hebelarme, von der Achse oder dem Drehpunkt O aus gemessen, so läfst sich zeigen, dafs das Moment der Mittelkraft R gleich der Momentensumme der Einzelkräfte ist. Betrachtet man nämlich AO als y-Achse, AX nach rechts als positive x-Achse, welche mit den Kräften die Neigungswinkel δ_1, δ_n und δ bildet, so ist nach der Figur $l_n = OA \cos \delta_n$, ebenso $l_1 = OA \cos \delta_1$, $l = OA \cos \delta$, so dafs

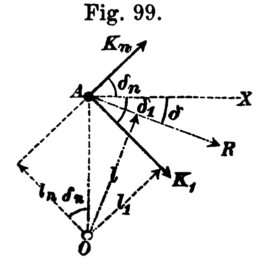


Fig. 99.

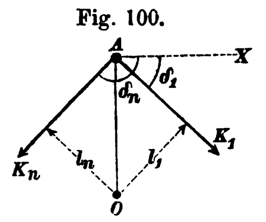
man die Momente auch schreiben kann: $K_1 \cdot OA \cos \delta_1$, $K_n \cdot OA \cos \delta_n$ und $R \cdot OA \cos \delta$. Da aber nach der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte (S. 40)

$$R \cos \delta = K_1 \cos \delta_1 + \ldots + K_n \cos \delta_n,$$

so folgt, wenn man allen Gliedern dieser Gleichung den Faktor OA hinzufügt, ohne weiteres, dafs das Moment von R gleich ist der Summe der Momente der Kräfte K.

In Figur 99 waren sämtliche $\cos \delta$ positiv. In Figur 100 aber haben $\cos \delta_1$ und $\cos \delta_n$ verschiedene Vorzeichen, so dafs in der Gleichung $R \cos \delta \cdot AO = \Sigma K \cos \delta \cdot AO$ auf der rechten Seite Summanden von verschiedenen Vorzeichen sich ergeben. Die Bedeutung dieses Unterschiedes ist aus der ursprünglichen Erklärung des Momentes Kl nicht ohne weiteres ersichtlich; sie tritt aber hervor, wenn man die drehende Wirkung der Kräfte, auf die es beim Momente wesentlich ankommt, ins Auge fafst. Denkt man sich den Punkt A mit der Achse O in starrer Verbindung und O als eine feste Drehachse, so haben in Fig. 99 die Kräfte K_1 und K_n übereinstimmend einen Drehsinn ⌒↘ rechts herum, im Sinne der Drehung des Uhrzeigers, während in Figur 100 der Drehsinn der Kräfte verschieden ist. Den Drehsinn **rechts** herum ⌒↘ pflegt man als positiv zu bezeichnen, die entsprechenden Momente ebenfalls positiv zu setzen, und umgekehrt, doch ist diese Festsetzung eine willkürliche; man könnte auch das Entgegengesetzte wählen. Verschiedener Drehsinn kennzeichnet verschiedene Vorzeichen der Momente, aber welche Richtung man positiv einführen will, steht frei. Es ist jedoch nützlich, sich an vorstehende feste Regel zu binden, damit man bei der Aufschreibung einer Momentensumme nicht unnötig zu überlegen braucht. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ist dann bei beliebig vielen Kräften in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte

Fig. 100.



$$Rl = \pm K_1 l_1 \pm K_2 l_2 + \ldots \pm K_n l_n$$

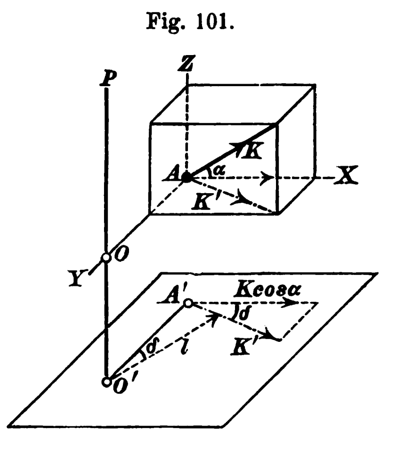
oder kürzer geschrieben

$$1) \qquad \boldsymbol{Rl = \Sigma Kl}.$$

Liegen die an einem Punkt A angreifenden Kräfte nicht in einer zur Achse OP (Fig. 101) rechtwinkligen Ebene, so ist die bisherige

Deutung des Momentes nicht mehr brauchbar. Mit Rücksicht darauf aber, dafs das Drehmoment ein Mafs für die drehende Wirkung der Kräfte sein soll, was allerdings erst später, gelegentlich der Betrachtung der Drehbewegung um eine feste Achse näher erläutert werden kann, bezeichnet man als **Moment einer Kraft K in Bezug auf eine beliebige Achse OP das Moment derjenigen Kraft K', welche sich als Projektion von K auf eine zur Achse OP rechtwinklige Ebene ergibt.** Es läfst sich zeigen, dafs auch in dieser allgemeineren Bedeutung das Moment der Mittelkraft gleich der Momentensumme der Einzelkräfte ist. Betrachtet man nämlich (Fig. 101) die durch A winkelrecht zu OP gelegte Gerade AO als y-Achse, legt AZ parallel zu OP, und AX winkelrecht zu beiden, so kann man K mittels eines Parallelepipeds in bekannter Weise zerlegen in $K \cos \alpha$, $K \cos \beta$, $K \cos \gamma$, von denen die beiden ersteren unten in der Projektionsebene in voller Gröfse erscheinen. K' bedeutet die Mittelkraft dieser beiden. In der Projektionsebene aber kann das Moment $K'l$ von K' auch in der Form $K' \cdot O'A' \cdot \cos \delta$ (Fig. 101) geschrieben werden, oder, weil $K' \cos \delta$ die Seitenkraft in der Richtung AX, $= K \cos \alpha$ bedeutet, auch in der Form $K \cdot \cos \alpha \cdot OA$. Greifen nun im Punkt A beliebig viele Kräfte K an, deren Mittelkraft R ist, so kann man in gleicher Weise das Moment von R in Bezug auf OP in die Form $R \cos \alpha \cdot OA$ bringen. Weil nun noch $R \cos \alpha = \Sigma K \cos \alpha$, so wird auch

Fig. 101.



$$R \cos \alpha \cdot OA = \Sigma K \cos \alpha \cdot OA,$$

und man hat den Satz:

Für Kräfte an einem Punkt ist das Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente der Einzelkräfte.

Da das Moment der Kraft K zu $\mathfrak{M} = K \cos \alpha \cdot OA$ gefunden wurde, so wird es gleich Null, wenn $\alpha = 90^0$ ist, d. h. wenn K

rechtwinklig zu AX steht, sich also in der yz-Ebene befindet, der auch die Achse OP angehört. Das Moment einer Kraft wird also Null in Bezug auf eine Achse, die mit ihr in derselben Ebene liegt, d. h. sie schneidet oder ihr parallel ist.

Eine Kraft, deren Projektion auf die Drehungsebene = 1 kg, gibt mit einem Hebelarme = 1 m das Moment Eins. Diese Momenten-Einheit nennt man, wie die Arbeitseinheit, Meterkilogramm; in ihrer Bedeutung aber ist sie von der Arbeitseinheit verschieden.

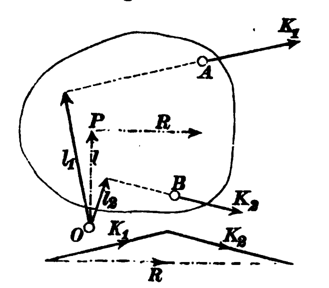
Für Momentengröfsen wählen wir den deutschen Buchstaben $\mathfrak{M}$, weil der lateinische Buchstabe M für die Masse eines Körpers vorbehalten werden mufs.

Zusatz: Der Satz der Drehmomente ist aus dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte hergeleitet. Da ein entsprechender Parallelepiped-Satz auch von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gilt (S. 22 u. 25), so ist der Satz der Drehmomente nicht nur für Kräfte, sondern auch für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gültig.

Nunmehr kann die Lage der Mittelkraft R von zwei in der Zeichenebene liegenden Kräften auch gefunden werden, wenn der Schnittpunkt C in Fig. 97, S. 97, nicht benutzbar ist.

Man ermittelt zunächst (Fig. 102) Gröfse, Richtung und Sinn von R, indem man an beliebiger Stelle, z. B. in einer Hülfsfigur aus K_1 und K_2 einen Kräftezug bildet, dessen Schlufsseite $= R$. Sodann wählt man eine beliebige Achse O, rechtwinklig zur Zeichenebene, oder, was gleichbedeutend ist, einen Drehpunkt O in derselben, ermittelt die rechtwinklig gemessenen Hebelarme l_1 und l_2 der Kräfte und bedenkt, dafs

Fig. 102.



$R l = K_1 l_1 + K_2 l_2$ sein mufs.

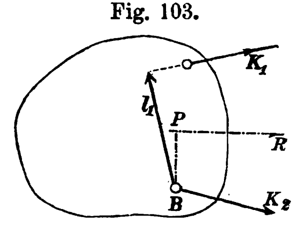
In der Figur haben K_1 und K_2 beide den Drehsinn rechts herum, weshalb ihre Momente positiv angesetzt wurden. R mufs dann an dem Hebelarm

$$l = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2}{R}$$

ebenfalls rechts herum drehen. Legt man daher durch O eine Rechtwinklige zur Schlufsseite R des Kräftezuges und trägt auf ihr

die Länge $l = OP$ ab, so muſs die endgültige Lage von R durch P gehen, denn es dreht dann R an dem Arm OP, u. zw. rechts herum, wie erforderlich war. Da man aber O ganz beliebig wählen kann, so wird man ihm eine solche Lage geben, daſs die Bestimmung der Lage von R möglichst einfach wird. Man wähle (Fig. 103) irgend einen Punkt der Richtungslinie von K_2, z. B. B zum Drehpunkte, dann hat K_2 den Hebelarm $l_2 = 0$, und es wird

Fig. 103.



$$l = \frac{K_1 l_1}{R} = BP,$$

womit die Lage von R bestimmt ist. Für einen Drehpunkt auf der Richtungslinie der Mittelkraft R wird deren Moment und folglich auch die Summe der Momenten von K_1 und K_2 gleich Null, d. h. in Bezug auf Punkte der Mittelkraft stehen die Einzelkräfte im Drehungsgleichgewicht.

Beispiel: $K_1 = 20$ kg; $K_2 = 30$ kg (dargestellt durch 2 bezw. 3 cm); sie schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 30°$; $l_1 = 1{,}5$ cm $= 0{,}015$ m. Dann wird

$$R = \sqrt{400 + 900 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0{,}866} = 10\sqrt{23{,}4} = 48{,}4 \text{ kg}.$$
$$l = 20 \cdot 0{,}015 : 48{,}4 = 0{,}0062 \text{ m} = 6{,}2 \text{ mm}.$$

4. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in einer Ebene.

a) Zeichnerisches (graphisches) Verfahren.

Kräfte verschiedener Richtung.

Die zu einer Mittelkraft zu vereinigenden Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 u. s. w. mögen ohne gemeinsamen Angriffspunkt zerstreut in einer Ebene liegen. (Fig. 104 u. 104a.) Man verschiebe zunächst zwei derselben K_1 und K_2 in ihrer Richtung bis zum Schnittpunkte a ihrer Richtungslinien, vereinige sie hier zu einer Mittelkraft R_1, verschiebe diese und die folgende Kraft K_3 in ihren Richtungen bis zum Schnittpunkte b und setze sie hier zu einer Mittelkraft R_2 zusammen. In gleicher Weise setze man R_2 mit K_4 zu einer Mittelkraft R_3 u. s. w. zusammen. — Gröſse und Richtung der Mittelkräfte R_1, R_2, R_3 u. s. w. lassen sich auch,

und zwar bequemer, in einer Hülfsfigur 104a ermitteln, indem man sie durch Parallelverschiebung zu einem Kraftecke aneinander reiht, so dafs die Pfeilrichtungen einander folgen. (Vergl. S. 41.)

Die Linien ef, eg und eh stellen die Mittelkräfte R_1, R_2 und R_3 nach Gröfse und Richtung dar. Um ihre Lage zu finden, braucht man nur zu beachten, dafs R_1 durch den Schnittpunkt a von K_1 und K_2, R_2 durch den Schnittpunkt b von K_3 und R_1 u. s. w. gehen mufs. Man zieht von a aus $ab \parallel ef$, $bc \parallel eg$ und $R_3 \parallel eh$, so erhält man Lage und Richtungslinien der Mittelkräfte.

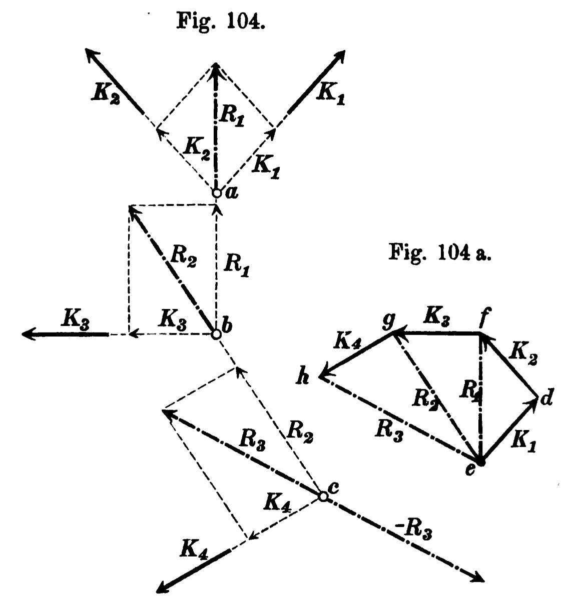


Fig. 104.

Fig. 104 a.

Kehrt man die Mittelkraft R_3 um, so hält sie sich mit den gegebenen Kräften K_1, K_2, K_3 und K_4 an dem Körper im Gleichgewicht. Denkt man sich die Punkte a, b, c, d durch ein Seil verbunden, so würde auch durch Vermittelung desselben die Kraft $-R_3$ die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht halten. Den Linienzug abc nennt man daher ein Seileck (Seilpolygon) der Kräftegruppe $K_1 K_2 K_3$ u. s. w., oder auch deren Mittelkraftpolygon. Die Anwendbarkeit des vorbeschriebenen Verfahrens hat zur Voraussetzung, dafs die Schnittpunkte a, b, c u. s. w. der Kräfte K_1 und K_2, K_3 und R_1 u. s. w. auf die Zeichentafel fallen. Vielfach wird dies nicht, oder doch nicht bei allen Punkten zutreffen. Für diesen allgemeinen Fall ist das Verfahren wie folgt umzugestalten; vergl. Fig. 105 und 105a:

Wir zerlegen K_1 im Punkte a in beliebig gerichtete Seitenkräfte I und II. Im Schnittpunkte b der Kraftlinien II und K_2 zerlegen wir K_2 in Seitenkräfte $-II$ und III; ebenso im Schnitt-

punkte c der Kraftlinien III und K_3 letztere Kraft in die Seitenkräfte $-III$ und IV u. s. w. Dann ist

$$K_1 \equiv I,\ II,$$
$$K_2 \equiv -II,\ III,$$
$$K_3 \equiv -III,\ IV,$$
$$K_4 \equiv -IV,\ V \text{ u. s. w.}$$

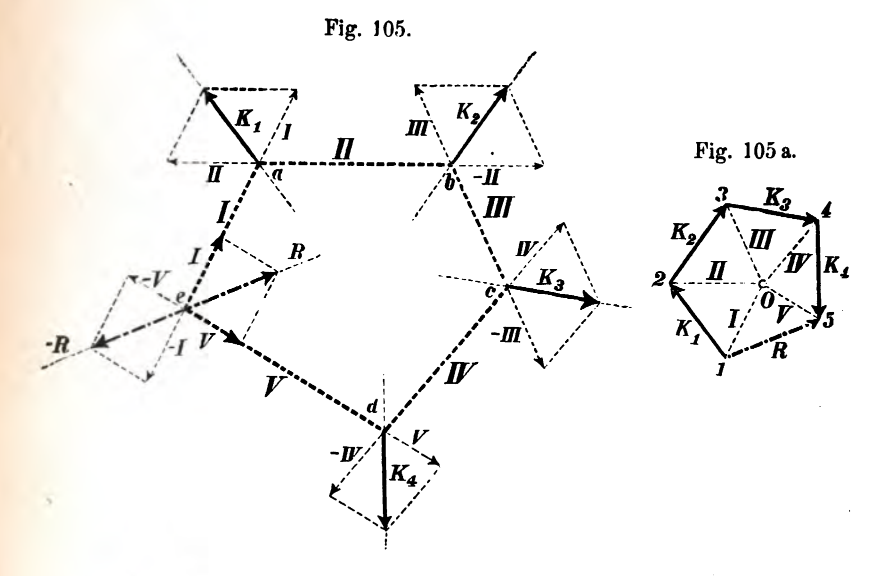
und im Zusammenwirken aller Kräfte

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4 \equiv I,\ II,\ -II,\ III,\ -III,\ IV,\ -IV,\ V,$$

oder, da die entgegengesetzt gleichen Kräfte sich aufheben

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4 \equiv I,\ V.$$

Fig. 105.



Der Linienzug $abcde$ ist bestimmt durch die Wahl des Punktes a und der Richtungen der ersten beiden Seitenkräfte I und II. Bei zweckmäfsiger Wahl dieser Bestimmungsstücke ist es unter allen Umständen leicht zu erreichen, dafs die der gegebenen Kräftegruppe gleichwertigen, sie völlig ersetzenden Kräfte I und V in ihren Richtungslinien sich in einem auf die Zeichentafel fallenden Punkte e schneiden. Setzt man sie hier zu ihrer Mittelkraft R zusammen, so ist diese zugleich die Mittelkraft der gegebenen Kräftegruppe. Kehrt man sie um, so hält sie der gegebenen Kräftegruppe das Gleichgewicht, und diese Wirkung kommt auch zu

stande, wenn man die Kräfte, statt an einem Körper, an einem die Punkte a, b, c, d, e verbindenden Seile angreifen läfst. Der Linienzug $a\,b\,c\,d\,e$ verdient danach wieder die Bezeichnung Seileck.

Bei dem hier gewählten Richtungssinn der Kräfte K_1, K_2 u. s. w. streben diese die Eckpunkte a, b, c, d, e des Seilecks voneinander zu entfernen, die Seilecksseiten zu zerreifsen. — Kehrt man den Richtungssinn der gegebenen Kräfte um, so bleibt der Linienzug $a\,b\,c\,d\,e$ derselbe. Jetzt aber streben die Kräfte, die Punkte a, b, c, d, e einander zu nähern, die Seilecksseiten zu zerdrücken. Demgegenüber können die Punkte nicht mehr durch ein Seil, sondern nur durch steife, in den Punkten a, b, c, d, e durch Gelenke miteinander verbundene Stangen in ihrer Lage erhalten werden. Für diesen Fall würde daher die Bezeichnung Gelenkvieleck zutreffender sein, doch hat sich der Name Seileck auch für beliebige Kraftrichtungen eingebürgert. Die materiell gedachten Seilecksseiten haben dabei allgemein den Zweck zu erfüllen, die Eckpunkte in unveränderlichen Entfernungen voneinander zu erhalten.

Die unmittelbare Zeichnung des Seilecks zwecks Zusammensetzung der gegebenen Kräftegruppe zu ihrer Mittelkraft erfordert die Zerlegung der Kräfte K_1, K_2 u. s. w. in den Punkten a, b, c und d nicht; sie ist hier nur geschehen, um das Wesen der Methode um so klarer hervortreten zu lassen. Bei Anwendung derselben führt man die Zerlegung bequemer in einer Hülfsfigur 105a aus. Durch Parallelverschiebung werden die Kräfte zu einem ununterbrochenen Linienzuge dem Krafteck 1, 2, 3, 4, 5 vereinigt. Zieht man jetzt durch die Endpunkte 1 und 2 der Kraft K_1 in geeigneten Richtungen die Linien 1-0 und 0-2, so kann man diese als die Seitenkräfte I und II der Kraft K_1 ansehen. Verbindet man weiter den Punkt 0 mit 3, so stellen die Linien $2\text{-}0 = -II$ und $0\text{-}3 = III$ die Seitenkräfte der Kraft K_2 u. s. w. dar. In den Linien 0-2 und 2-0, 0-3 und 3-0 u. s. w. erhält man die in den Seilecksseiten ab, bc u. s. w. sich aufhebenden Kräfte II und $-II$, III und $-III$ u. s. w. Die Linien 1-0 und 0-5 drücken die allein zurückbleibenden, der gegebenen Kräftegruppe gleichwertigen Hülfskräfte I und V aus. Ihre Mittelkraft $1\text{-}5 = R$, die Schlufslinie des Kraftecks, ist auch die Mittelkraft der gegebenen Kräftegruppe. Den Punkt 0 nennt man den Pol des Kraftecks, die Linien 0-1, 0-2 u. s. w. die Pol-

strahlen; sie stellen, wie bemerkt, in ihrer Richtung und Gröfse die Hülfskräfte (Seilkräfte) *I*, *II* u. s. w. dar.

Durch die Wahl der Richtungen der ersten beiden Seitenkräfte *I* und *II* ergab sich im Schnittpunkt beider der Pol 0. Durch eine geeignete Wahl des Poles 0 wird umgekehrt Richtung und Gröfse sämtlicher Polstrahlen bezw. Hülfskräfte *I*, *II*, *III* u. s. w. festgelegt.

Die unmittelbare Anwendung der Methode gestaltet sich danach einfach wie folgt:

Man zeichnet das Krafteck 1-2-3-4-5 und erhält in der Schlufslinie 1-5 desselben die Mittelkraft R nach Gröfse und Richtung. Zur Bestimmung ihrer Lage zeichnet man das Seileck, indem man einen geeigneten Pol 0 wählt, die Polstrahlen *I* bis *V* zeichnet und von irgend einem Punkte a einer der Kraftlinien, z. B. K_1 ausgehend, die Seilecksseite *I* parallel dem Polstrahl *I*, die Seilecksseite *II* parallel dem Polstrahl II bis zum Schnittpunkte a mit K_2 u. s. w. alle Seilecksseiten parallel den zugehörigen Polstrahlen zieht. Durch den Schnittpunkt e der ersten und letzten Seilecksseite *I* und *V* geht die Mittelkraft, und damit ist auch ihre Lage bestimmt.

Das einmal gezeichnete Krafteck und Seileck setzen uns ohne weiteres auch in die Lage, für einzelne Kräfte der Gesamtgruppe die Mittelkraft zu bestimmen. Beispielsweise ist die Mittelkraft der Kräfte K_2 und K_3 nach Richtung und Gröfse gleich der Linie 2-4 bestimmt. Der Lage nach mufs sie durch den Schnittpunkt der die Kräfte K_2 und K_3 einschliefsenden Seilecksseiten *II* und *IV* gehen.

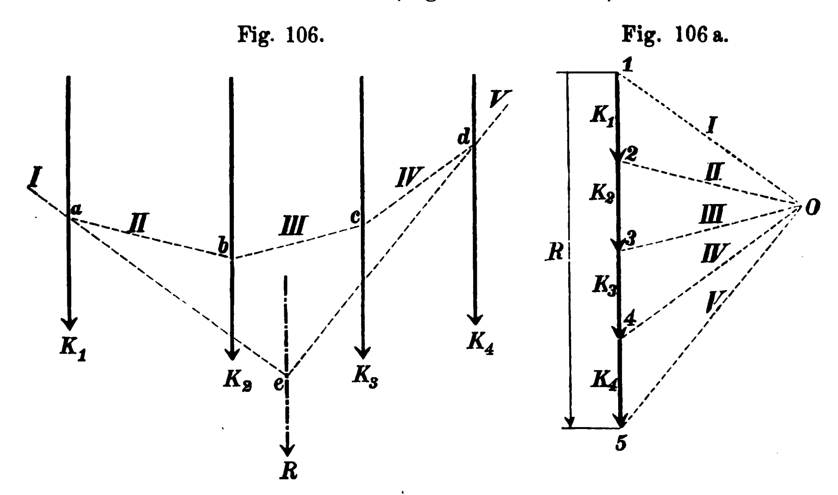
Bei Anwendung des vorstehend beschriebenen Verfahrens erscheinen die Kräfte in ihrer Lage (im Seileck) nur in ihren Richtungslinien, im Krafteck dagegen nach Richtung und Gröfse.

Parallelkräfte.

Das vorbeschriebene Verfahren läfst sich ohne weiteres auch auf Parallelkräfte anwenden. Das Krafteck nimmt in diesem Falle die Form einer geraden Linie an. Haben alle Kräfte gleichen Richtungssinn, so reihen sie sich in derselben Richtung aneinander

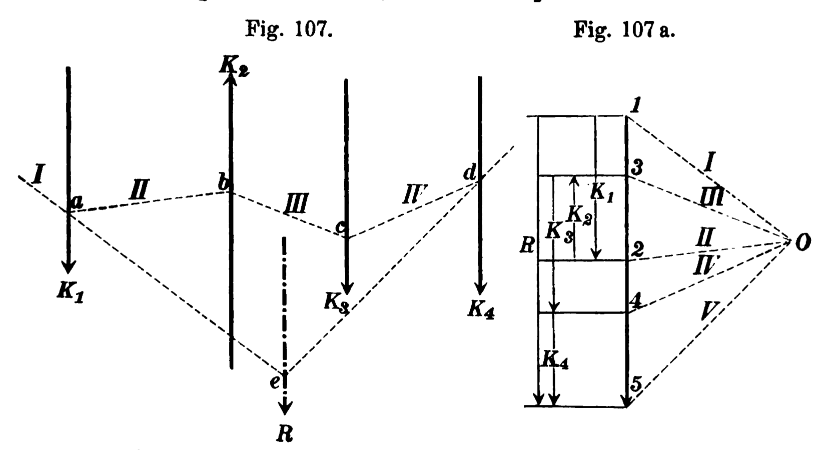
und die Schlußlinie des Kraftecks, die Mittelkraft, stellt sich als Summe der Einzelkräfte dar. (Fig. 106 u. 106a.)

Fig. 106. Fig. 106a.



Haben die Kräfte teils entgegengesetzten Richtungssinn (Fig. 107 und 107a), so decken sie sich im Krafteck teilweise; die Beiträge der Einzelkräfte zur Mittelkraft fallen z. T. negativ aus. In der Fig. 107a ist beispielsweise die Kraft K_1, im Krafteck durch die Strecke 1-2 dargestellt, abwärts, die Kraft K_2 durch die Strecke 2-3

Fig. 107. Fig. 107a.



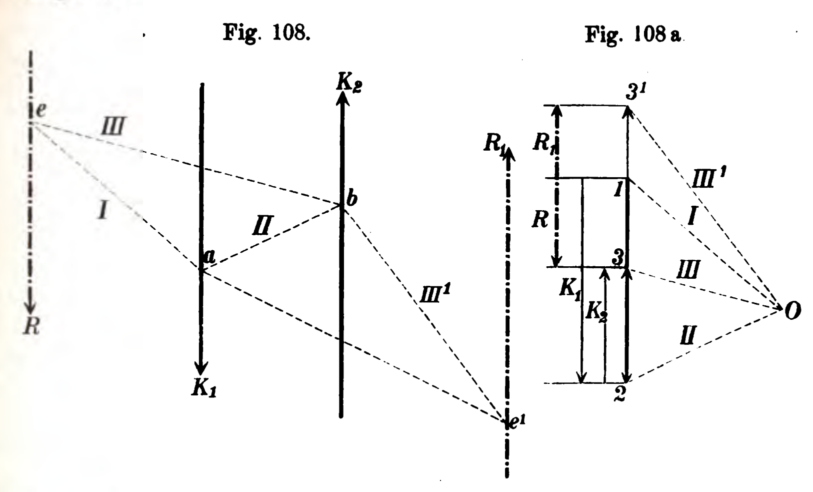
dargestellt aufwärts gerichtet. Die Mittelkraft beider, die Strecke 1-3, ist gleich ihrer Differenz. Die abwärts gerichteten Kräfte K_3 und K_4 reihen sich in den Strecken 3-4 und 4-5 an und die Schlufs-

linie 1-5 ist die Mittelkraft der ganzen Gruppe. Bei der Zeichnung des Seilecks Fig. 107 ist auf die Reihenfolge der Polstrahlen zu achten. Der bessern Übersicht wegen empfiehlt es sich, die die einzelnen Kraftstrecken im Kraftecke begrenzenden Punkte und die zugehörigen Polstrahlen mit entsprechenden arabischen und römischen Ziffern zu bezeichnen. Zur Zeichnung des Seilecks wählt man einen Pol O, zieht die Polstrahlen und parallel denselben in entsprechender Reihenfolge die Seilecksseiten. Durch den Schnittpunkt e der äufsern, d. h. der ersten und letzten Seilecksseite I und IV, ist die Mittelkraft R festgelegt.

Zwei Parallelkräfte von entgegengesetztem Richtungssinn — Kräftepaar.

Besondere Aufmerksamkeit verdient das Ergebnis der Zusammensetzung zweier Parallelkräfte. Das in vorbeschriebener Weise zu den Kräften gezeichnete Kraft- und Seileck ist in Fig. 108 u. 108a dargestellt. Die Schlufslinie 1-3 des Kraftecks, die Differenz der

Fig. 108. Fig. 108a.



Kräfte K_1 und K_2 ist ihre Mittelkraft. Der Schnittpunkt e der äufseren, die Kräfte einschliefsenden Seilecksseiten I und III, durch welchen die Lage der Mittelkraft R bestimmt ist, liegt auf der Seite der gröfseren Kraft K_1. Denken wir uns K_2 allmählich gröfser und endlich gleich K_1 werdend, so nähert sich im Kraftecke der Punkt 3 allmählich dem Punkte 1 und fällt endlich mit 1 zusammen;

ebenso der Polstrahl 0-3 mit 0-1. Die Schlufslinie 1-3, die Mittelkraft, wird 0, die äufseren Seilecksseiten I und III werden parallel, ihr Schnittpunkt e rückt in unendliche Ferne und mit ihnen die Mittelkraft. In diesem Grenzfalle, gekennzeichnet durch eine Mittelkraft $R = 0$ in unendlicher Ferne, nennen wir die beiden Kräfte ein „Kräftepaar". Die mechanischen Eigentümlichkeiten eines solchen werden weiter unten erörtert werden.

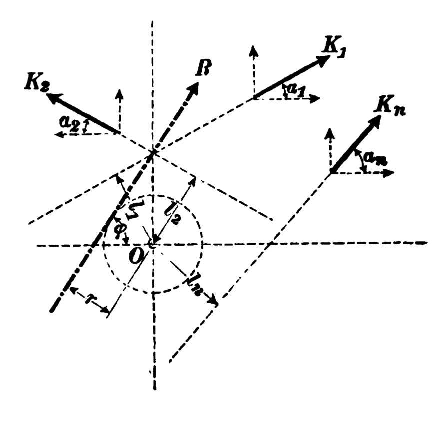
Lassen wir K_2 noch weiter wachsen und gröfser werden als K_1, so rückt der Punkt 3 im Krafteck über 1 hinaus nach 3', die Mittelkraft 1-3 wechselt ihr Vorzeichen, der Schnittpunkt e der Seilecksseiten I und III bewegt sich durch die Unendlichkeit und tritt auf die rechte Seite der Kraft K_2, der nun gröfseren beider Kräfte. Die Mittelkraft zweier Parallelkräfte entgegengesetzten Richtungssinnes liegt also stets aufserhalb beider Kräfte und zwar auf der Seite der gröfseren derselben.

b) Rechnerisches (analytisches) Verfahren.

Kräfte verschiedener Richtung.

Wir beziehen die gegebene Kräftegruppe auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Fig. 109). Die Lage der Einzelkräfte K_1, K_2 u. s. w. sei gegeben durch die Neigungswinkel α_1, α_2 u. s. w., welche ihre Richtungslinien mit der X-Axe einschliefsen und durch die senkrechten Abstände l_1, l_2 u. s. w. dieser Richtungslinie vom Koordinaten-Nullpunkte. Um zunächst die Richtung und Gröfse der gesuchten Mittelkraft R zu erhalten, denken wir uns die Einzelkräfte K_1, K_2 u. s. w. in Seitenkräfte X_1, X_2 u. s. w. parallel zur X-Achse und Y_1, Y_2 u. s. w. parallel zur Y-Achse zerlegt, so dafs

Fig. 109.



$$X_1 = K_1 \cos \alpha, \quad X_2 = K_2 \cos \alpha_2 \text{ u. s. w. und}$$
$$Y_1 = K_1 \sin \alpha, \quad Y_2 = K_2 \sin \alpha_2 \text{ u. s. w. wird.}$$

Ist dann X die Mittelkraft der horizontalen und Y diejenige der vertikalen Seitenkräfte, so mufs sein

$$X = X_1 + X_2 + \ldots = K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 + \ldots = \Sigma K \cos\alpha$$

und $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots = K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 + \ldots = \Sigma K \sin\alpha$.

Die Mittelkraft R der zueinander senkrechten Kräfte X und Y ist zugleich die Mittelkraft der gegebenen Kräftegruppe. Ihrer Gröfse nach ergibt sich dieselbe zu

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\Sigma K \cos\alpha)^2 + (\Sigma K \sin\alpha)^2}$$

und für ihren Richtungswinkel φ gegen die X-Achse gilt die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Sigma K \sin\alpha}{\Sigma K \cos\alpha}.$$

Es bleibt die Lage von R zu bestimmen. Dieses soll mit Hülfe des Satzes von den statischen Momenten geschehen. Ist r der senkrechte Abstand der Mittelkraft R vom Koordinaten-Nullpunkte, so mufs in Bezug auf diesen als Drehpunkt die Momentengleichung bestehen

$$5)\qquad R \cdot r = K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + K_4 l_4 + \ldots = \Sigma K l$$

und daraus

$$6)\quad r = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + K_4 l_4 + \ldots}{R} = \frac{\Sigma K l}{\sqrt{(\Sigma K \cos\alpha)^2 + (\Sigma K \sin\alpha)^2}}.$$

Die Mittelkraft R mufs also ihrer Lage nach einen Kreis vom Radius r, um 0 beschrieben, berühren. Diese Berührung kann, nachdem die Richtung von R oben bereits festgelegt ist, in zwei Punkten geschehen. Welche von beiden Tangentenlagen die richtige ist, darüber entscheidet das Vorzeichen von $\Sigma K l$ in Gleichung 5. Ist $\Sigma K \cdot l$ positiv, üben also die Kräfte K_1, K_2 u. s. w. insgesamt ein rechtsherum gerichtetes Drehbestreben in Bezug auf den Punkt 0 aus, so mufs auch das Drehbestreben von R rechtsherum gerichtet sein; die obere Tangentenlage stellt die Lage von R dar und umgekehrt. Ist $\Sigma K l = 0$ und $R > 0$, so wird nach Gleichung 6 $r = 0$, die Mittelkraft geht durch 0. Ist dagegen $R = 0$, aber $\Sigma K l > 0$, so ist $r = \infty$; die Gleichung 5 nimmt die Form an $0 \cdot \infty = \Sigma K l$. Die Kräftegruppe hat die Wirkung eines Kräftepaares. Der mechanische Wert der Kräftegruppe besteht in diesem Falle lediglich in einem Drehmoment. Wird gleichzeitig

$$R = \sqrt{(\Sigma K \cos\alpha)^2 + (\Sigma K \sin\alpha)^2} = 0$$

und $\Sigma K l = 0$, so verschwindet auch das Moment und die Kräftegruppe hat keinerlei mechanische Wirkung auf den Körper, die Kräfte stehen miteinander im Gleichgewicht. Damit aber $R = 0$ sei, mufs $\Sigma K \cos\alpha = 0$ und $\Sigma K \sin\alpha = 0$ sein.

Die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften in einer Ebene lauten also:

$$\Sigma K \cos\alpha = 0, \quad \Sigma K \sin\alpha = 0, \quad \Sigma K \cdot l = 0,$$

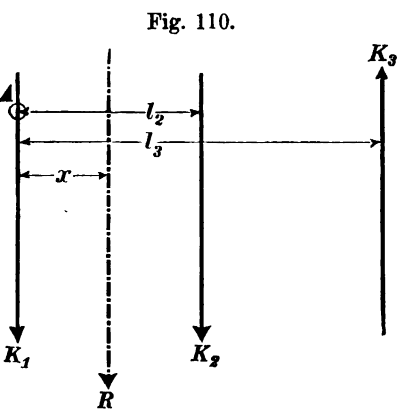
oder, wenn die X-Achse wagerecht, die Y-Achse lotrecht angenommen wird, in Worten:

Die algebraischen Summen aller wagerechten und aller lotrechten Seitenkräfte je für sich genommen und die algebraische Summe aller Momente der Kräftegruppe in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

Parallelkräfte.

Es soll jetzt eine beliebige Anzahl von Parallelkräften K_1, K_2, K_3 u. s. w. verschiedenen Richtungssinnes (verschiedener Pfeilrichtung) zu ihrer Mittelkraft vereinigt werden. (Fig. 110).

Fig. 110.



Die Gröfse der Mittelkraft R ist nach den bezüglichen Ausführungen unter a gleich der algebraischen Summe der Kräfte und ihre Richtung parallel denselben.

1) $$R = K_1 + K_2 - K_3 + \ldots = \Sigma K.$$

Die Lage von R ergibt sich aus dem Satz der Drehmomente. Beziehen wir die diesem Satze entsprechende Momentengleichung, welche für jeden Punkt der Kraftebene gültig ist, der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber auf einen der Richtungslinie einer der Kräfte z. B. K_1 angehörigen Punkt A als Drehpunkt und bezeichnen den noch unbekannten senkrechten Abstand der Mittelkraft R von A mit x, siehe Fig. 109, so folgt

2) $$R \cdot x = K_1 0 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + \ldots = \Sigma K \cdot l$$

und daraus weiterhin

$$3)\qquad x = \frac{K_1 0 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + \ldots}{K_1 + K_2 - K_3 + \ldots} = \frac{\Sigma \cdot K \cdot l}{\Sigma \cdot K}.$$

Je nach dem Vorzeichen von $\Sigma K \cdot l$ und $\Sigma \cdot K$ fällt x positiv oder negativ aus; liegt also R rechts oder links vom angenommenen Drehpunkte A.

Eine völlige Umkehrung des Richtungssinnes der Kräfte, mit welcher eine gleichzeitige Umkehrung des Drehsinnes der Einzelkräfte verknüpft ist, würde den Abstand x und also die Lage der Mittelkraft nicht ändern, sondern nur ihren Richtungssinn umkehren.

Für einen Drehpunkt auf der Richtung von R würde $X = 0$ und folglich auch $R \cdot x = \Sigma K \cdot l = 0$, d. h. die Kräfte halten sich also in Bezug auf einen solchen Punkt das Drehungsgleichgewicht.

Beispiel: Für $K_1 = 300$ kg, $K_2 = 200$ kg, $K_3 = -100$ kg und $l_2 = 1{,}0$ m, $l_3 = 1{,}5$ m wird

$$x = \frac{300 \cdot 0 + 200 \cdot 1{,}0 - 100 \cdot 1{,}5}{300 + 200 - 100} = \frac{+50}{+400} = +0{,}125 \text{ m}.$$

Für $l_2 = 0{,}5$ m und im übrigen dieselben Werte wird

$$x = \frac{-50}{400} = -0{,}125 \text{ m}.$$

Verschwinden die Kräfte bis auf zwei gleich gerichtete K_1 und K_2, deren Entfernung l sei (Fig. 111), so gehen die Gleichungen 1 und 3 über in

Fig. 111.

$$4)\qquad R = K_1 + K_2 \quad \text{und}$$

$$5)\qquad x = \frac{K_2 l}{K_1 + K_2}.$$

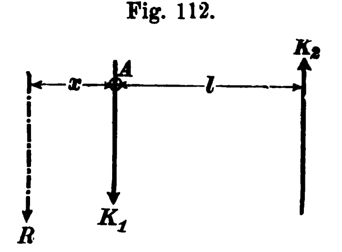
Da der Quotient $\frac{K_2}{K_1 + K_2}$ bei der Gleichsinnigkeit von K_1 und K_2 stets positiv und kleiner als eins sein mufs, so ist x stets positiv und kleiner als l, d. h. die Mittelkraft zweier gleichsinniger Parallelkräfte liegt stets zwischen denselben. Für $K_1 \geqq K_2$ ist $\frac{l \cdot K_2}{K_1 + K_2} \leqq \frac{l}{2}$, d. h. die Mittelkraft liegt näher der gröfseren Seitenkraft und in der Mitte beider, wenn sie einander gleich sind.

Kehrt die Kraft K_2 ihren Richtungssinn um (Fig. 112), so wird

6) $$R = K_1 - K_2,$$

7) $$x = \frac{-K_2 l}{K_1 - K_2}.$$

Fig. 112.



Ist dabei $K_1 > K_2$, so wird x negativ, d. h. die Mittelkraft R liegt aufserhalb beider Kräfte und zwar auf der Seite der gröfseren. R ist gleichsinnig mit K_1.

Ist $K_2 > K_1$, so wird nach Gleichung 6 R negativ, und gleichsinnig mit K_2 und nach Gleichung 7

$$x = \frac{-K_2 l}{-(K_2 - K_1)} = \frac{K_2 l}{K_2 - K_1}.$$

Da $\frac{K_2}{K_2 - K_1}$ positiv und gröfser als eins, so mufs x stets positiv und gröfser als l sein, d. h. auch in diesem Falle liegt die Mittelkraft R aufserhalb beider Kräfte und wiederum auf der Seite der gröfseren.

Denkt man sich den Fall $K_1 > K_2$ durch allmähliches Wachsen, von K_2 in den Fall $K_2 > K_1$ übergehend, so wird in dem Mafse als K_2 sich der Gröfse von K_1 nähert, x im negativen Sinne immer gröfser und die Mittelkraft $R = K_1 - K_2$ rückt nach links in immer gröfsere Ferne.

Für $K_1 = K_2$ wird nach den Gleichungen 6 und 7

$$R = 0, \quad x = \mp \infty;$$

beide Kräfte bilden ein Kräftepaar. Sobald K_2 nur um ein Geringes gröfser wird als K_1, rückt R auf die rechte Seite der Kräfte, bewegt sich also durch die Unendlichkeit. (Vergl. S. 109.)

Für den Grenzfall $K_1 = K_2$ folgt aus Gleichung 7

$$(K_1 - K_2)\, x = 0 \cdot \infty = K_2 l.$$

Die Mittelkraft $R = 0$ am Hebelarm $x = \infty$ hat also das bestimmte endliche Moment $K_2 l$. Das gleiche Moment hat das Kräftepaar in Bezug auf jeden Drehpunkt der Ebene, z. B. in Bezug auf den Punkt A (Fig. 113)

$$M = K \cdot (a + l) - K \cdot a = K \cdot l.$$

Fig. 113.

Jedes Kräftepaar hat also eine Mittelkraft $= 0$, und der einzige mechanische Wert desselben ist sein Moment $K \cdot l$.

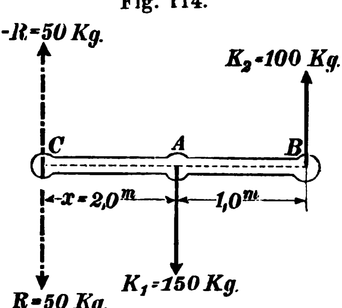
Der wesentliche Unterschied zwischen der Wirkung eines Kräftepaares und derjenigen anderer Parallelkräfte besteht darin, daſs ein Kräftepaar, weil es keine in der Endlichkeit liegende Mittelkraft hat, auch durch keine in der Endlichkeit liegende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden kann.

Beispiel: Ein etwa stabförmiger Körper (Fig. 114) werde wie skizziert von Kräften $K_1 = 150$ kg und $K_2 = 100$ kg ergriffen. Die Mittelkraft beider ist dann $R = 150 - 100 = 50$ kg und deren Lage im Abstande

$$x = \frac{100 \cdot 1{,}0}{50} = 2{,}0 \text{ m}$$

links von A zu finden. Eine hier im Punkte C angebrachte Kraft -50 kg hält die Kräfte K_1 und K_2 im Gleichgewicht. Wird der Körper in C, wenn auch nur drehbar, festgehalten, so bleibt er in Ruhe. Die Momente der Kräfte K_1 und K_2 heben sich in Bezug auf C als Drehpunkt auf $(-2 \cdot 150 + 3 \cdot 100 = 0)$ und C hat einen Widerstand von -50 kg zu leisten. Für $K_1 = K_2 = 100$ kg rückt R in unendliche Ferne und wird gleich Null. Hält man den Körper jetzt in C oder in irgend einem andern im Endlichen liegenden Punkte lediglich drehbar fest, so üben die Kräfte K_1 und K_2 ein Moment $-2 \cdot 100 + 3 \cdot 100 = 100$ mkg auf ihn aus und werden ihm daher eine Drehbewegung mitteilen. Gleichgewicht ist nicht möglich.

Fig. 114.



5. Zerlegung einer Kraft in Seitenkräfte.

Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

Die Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte von gegebenen Richtungslinien ist nur möglich, wenn der Schnittpunkt dieser letzteren auf die Richtungslinie der zu zerlegenden Kraft fällt, denn andernfalls würde die Mittelkraft der gesuchten Seitenkräfte ihrer Lage nach nicht mit der gegebenen Kraft zusammenfallen, ihr also nicht gleichwertig sein können. Der Fall, wo die Richtungslinien der gesuchten Seitenkräfte der gegebenen Kraft nicht parallel sind, ist bereits unter Ziffer 6 Seite 39 behandelt. Hier bleibt noch die Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Seitenkräfte nachzuholen. Dies möge zunächst auf zeichnerischem Wege geschehen.

Gegeben seien die Kraft K und die Richtungslinien mm und nn (Fig. 115 und 115a) ihrer gesuchten Seitenkräfte. Man denke sich die zu zerlegende Kraft K als Schlufslinie 1-3 eines Kraftecks, wähle einen Pol 0 und ziehe die Polstrahlen 0-1 u. 0-3 und durch einen beliebigen Punkt a der gegebenen Kraft K Parallelen I und III dazu, so können diese als die die gesuchten Kräfte einschliefsenden Seilecksseiten angesehen werden. Die mittlere Seite des Seilecks ergibt sich in der Verbindungslinie der Schnittpunkte b und c der Seiten I und III mit den gegebenen Kraftlinien mm und nn. Eine Parallele dazu durch den Pol 0 im Krafteck ergibt den zugehörigen Polstrahl 0-2, und in den Strecken 1-2 und 2-3 findet man die gesuchten Seitenkräfte. Ihre Zusammensetzung führt wieder auf die Mittelkraft K.

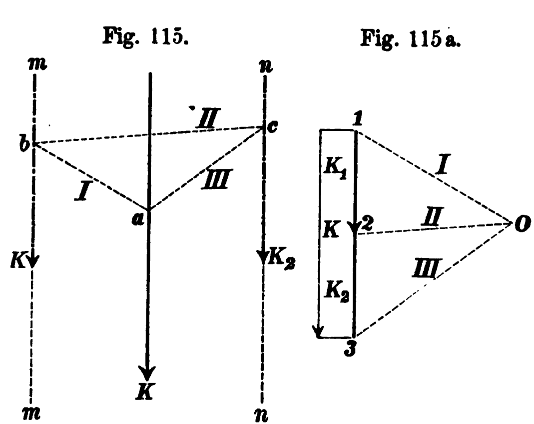


Fig. 115. Fig. 115a.

Liegen die Richtungslinien der gesuchten Seitenkräfte auf derselben Seite der zu zerlegenden Kraft, so bleibt die Konstruktion grundsätzlich dieselbe. (Fig. 116 und 116a.) Der Teilpunkt 2 fällt dann aufserhalb der Strecke 1-3. Die K am nächsten gelegene Seitenkraft $K_1 = 1-2$ ist dann gröfser als K und $K_2 = 2-3$ zeigt entgegengesetzten Richtungssinn $K = K_1 - K_2$.

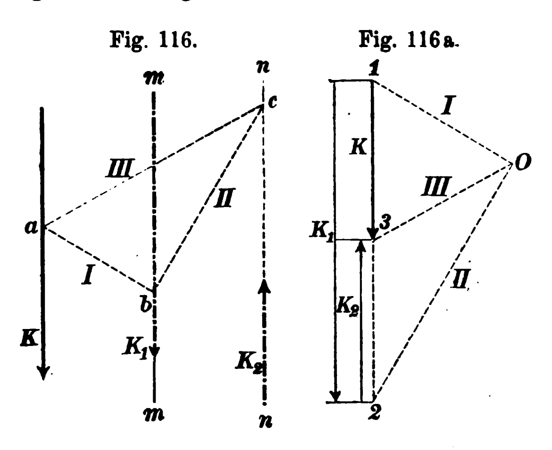


Fig. 116. Fig. 116a.

Rechnerisch gestaltet sich die Zerlegung wie folgt: In Bezug auf irgend einen Drehpunkt mufs die Summe der Momente der

gesuchten Kräfte gleich dem Moment der gegebenen Kraft K sein. Wählt man einen Punkt A auf der Richtungslinie mm (Fig. 117), so ergibt sich die Momentengleichung

Fig. 117.

$$K_2 \cdot (a + b) = K \cdot a$$

und daraus

$$K_2 = \frac{K \cdot a}{a + b}.$$

Zufolge $K_1 + K_2 = K$ ist

$$K_1 = K - K_2 = K - \frac{Ka}{a+b} = \frac{K \cdot b}{a+b}.$$

Liegen die gegebenen Richtungslinien auf derselben Seite von K (Fig. 118), so lautet die Momentengleichung

$$K_2(b - a) = -K \cdot a \quad \text{und daraus} \quad K_2 = \frac{-K \cdot a}{b - a}.$$

K_2 wird also negativ, nimmt entgegengesetzte Richtung an.

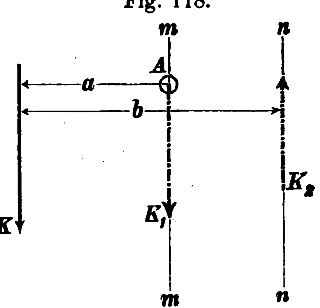


Fig. 118.

Daher wird

$$K_1 - K_2 = K,$$

$$K_1 = K + K_2 = K + \frac{K \cdot a}{b - a} = \frac{b \cdot K}{b - a}.$$

Da $b > a$, so folgt wieder

$$K_1 > K_2.$$

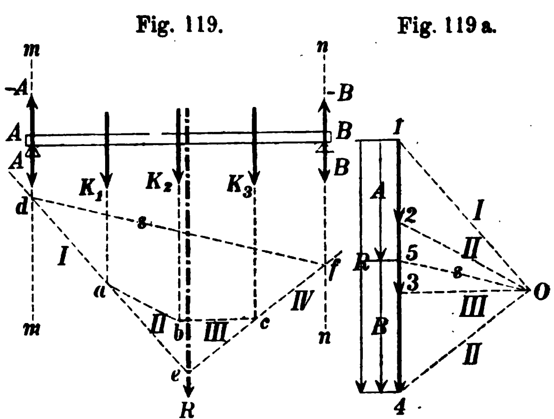
Beispiel: Ein auf zwei Stützen A und B ruhender Balken trägt die Vertikallasten K_1, K_2 und K_3. Mit welchen Kräften A und B drückt er auf die Stützen (Auflager) A und B?

Man setzt, zeichnerisch oder rechnerisch, die Lasten K_1, K_2 und K_3 zu ihrer Mittelkraft R zusammen und zerlegt diese nach den Richtungen der Auflager-Vertikalen mm und nn.

a) Zeichnerische Lösung: Die Gröfse von R wird in bekannter Weise als Schlufslinie 1 — 4 des Kraftecks Fig. 119a erhalten, und der Lage nach geht R durch den Schnittpunkt e der äufseren Seilecksseiten I und IV. Verbindet man die Schnittpunkte d und f der letzteren und der Stützvertikalen mm und nn miteinander und zieht im Krafteck 0-5 $\|$ df, dann ist 1-5 $= A$ und 5-4 $= B$. Die in die Richtung der Stützvertikalen mm und nn fallenden Seitenkräfte von R sind völlig gleichwirkend mit den Lasten K_1, K_2 und K_3. A und B stellen also die Kräfte dar, mit welchen der Balken auf seine Stützen

drückt. Nach dem Grundsatz von der Wirkung und Gegenwirkung geben die Stützen A und B entgegengesetzte gleiche Kräfte $-A$ und $-B$ zurück und diese halten den Lasten K_1, K_2 u. s. w. das Gleichgewicht.

Fig. 119. Fig. 119a.



b) Rechnerische Lösung (Fig. 120): Wie bekannt, ist die Mittelkraft $R = K_1 + K_2 + K_3$ und ihr Abstand x von B, letzteren Punkt als Drehpunkt angenommen,

$$x = \frac{K_1 \cdot l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3}{K_1 + K_2 + K_3}.$$

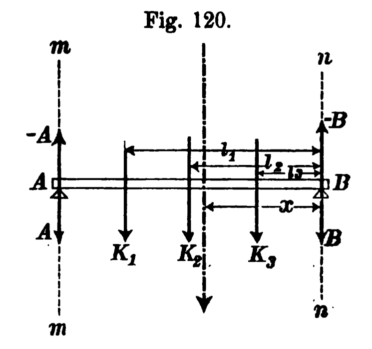
Für die Zerlegung nach den Stützvertikalen mm und nn gilt in Bezug auf B die Momentengleichung $Al = R \cdot x$, woraus $A = \frac{R \cdot x}{l}$ und, für x und R obige Werte eingesetzt

$$A = K_1 + K_2 + K_3 \cdot \frac{(K_1 l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3)}{l(K_1 + K_2 + K_3)} = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3}{l}.$$

Überlegt man, dafs die aufwärts gerichteten Kräfte A und B den Lasten gegenüber Gleichgewicht herstellen und mit ihnen zusammen in Bezug auf irgend einen Drehpunkt die Momentensumme Null liefern müssen, so ergibt sich für B als Drehpunkt die Momentengleichung $A l - K_1 l_1 - K_2 l_2 - K_3 l_3 = 0$ und daraus, wie oben

$$A = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3}{l}.$$

Fig. 120.



Der letztere Weg zur rechnerischen Lösung ist der kürzere und daher übliche. Die Kraft B findet man ebenso, wenn man A als Drehpunkt annimmt. Wenn A schon bekannt, findet man kürzer aus der Gleichung

$$A + B = K_1 + K_2 + K_3$$
$$B = K_1 + K_2 + K_3 - A.$$

Zerlegung einer Kraft in drei Seitenkräfte.

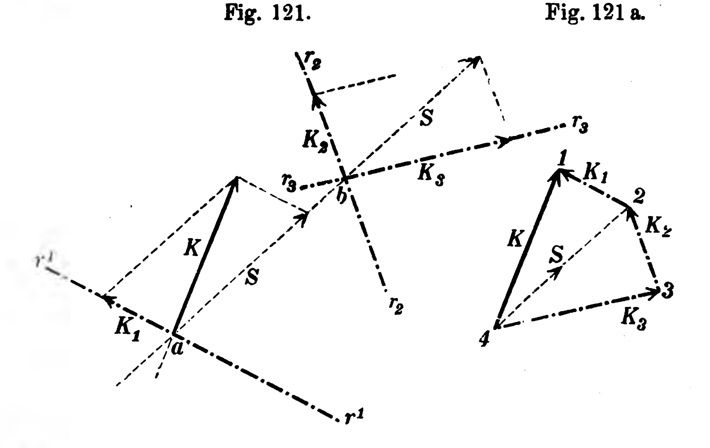
Die Zerlegung einer Kraft nach drei in ihren Richtungslinien gegebene Seitenkräfte ist nur möglich, bezw. hat nur einen be-

stimmten Sinn, wenn die drei Richtungslinien keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Die Wahrheit dieser Behauptung ergibt sich aus folgender Überlegung: Durch einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei gesuchten Kräfte K_1, K_2 und K_3 aufserhalb der Richtung von K müfste auch deren Mittelkraft gehen und könnte sich daher nicht mit K decken. Schneiden sich die drei Richtungslinien auf der Richtung von K, so ist, wie leicht ersichtlich, die Aufgabe unbestimmt, es sind unendlich viele Lösungen möglich.

Ist obige Bedingung erfüllt, so gestaltet sich die Lösung wie folgt:

a) Zeichnerische Lösung. r_1-r_1, r_2-r_2, r_3-r_3 Fig. 121 seien die gegebenen Richtungslinien. Wir bringen eine derselben, z. B. r_1-r_1 zum Schnitt mit der Richtung von K und verbinden

Fig. 121. Fig. 121 a.



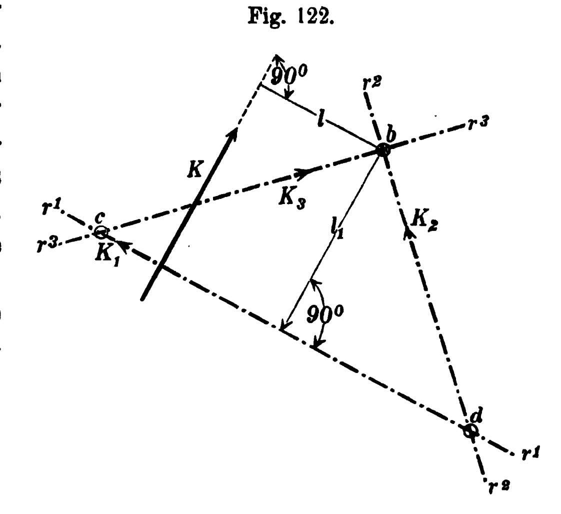
den Schnittpunkt a mit dem Schnittpunkt b der beiden anderen Richtungslinien, dann mufs die Mittelkraft S der in letztere Richtungen fallenden Seitenkräfte K_2 und K_3 in die Richtung ab fallen, denn sie mufs zusammen mit K_1 die Mittelkraft K liefern. Zerlegt man nun K in a nach den Richtungen r_1-r_1 und ab in die Seitenkräfte K_1 und S, letztere im Punkte b in die Seitenkräfte K_2 und K_3, so sind K_1, K_2 und K_3 die gesuchten Kräfte, denn ihre Mittelkraft wird wieder K.

Die Zerlegung geschieht zweckmäfsig in einem besonderen Krafteck, Fig. 121 a, indem man zunächst K nach Richtung und Gröfse aufträgt, durch deren Endpunkte 1 und 4 die Linien 1-2 $\parallel r_1 r_1$ und

2-4 ‖ ab und ferner durch die Punkte 2 und 4 die Linien 2-3 ‖ $r_2 r_2$ und 3-4 ‖ $r_3 r_3$ zieht.

b) **Rechnerische Lösung.** Die rechnerische Lösung stützt sich wieder auf den Satz von den statischen Momenten. Wir wählen den Schnittpunkt zweier gegebenen Richtungslinien, z. B. b als Drehpunkt, Fig. 122. Es entsteht dann eine Momentengleichung, in welcher nur eine der gesuchten Seitenkräfte K_1 vorkommt.

Fig. 122.



$$K \cdot l = K_1 \cdot l_1$$

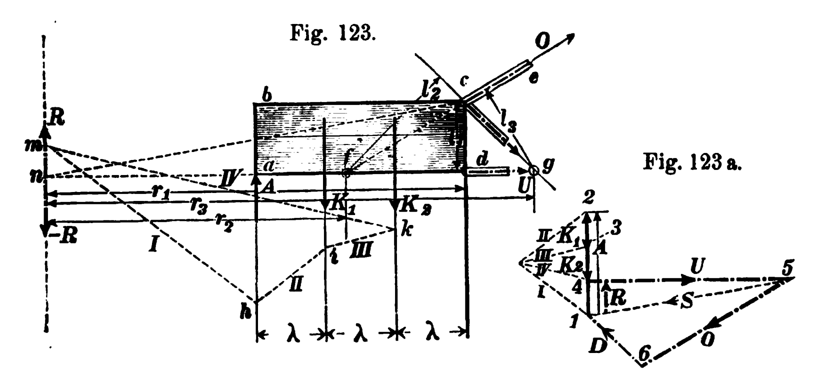
und daraus

$$K_1 = \frac{K \cdot l}{l_1}.$$

Wählt man nun weiterhin c und ein drittes Mal d als Drehpunkt, so berechnen sich in gleicher Weise die Seitenkräfte K_2 und K_3.

Beispiel: Eine Scheibe $abcd$ wird, wie aus Fig 123 ersichtlich, in ihrer Ebene von Parallelkräften A, K_1 und K_2 ergriffen. In den Punkten

Fig. 123.



c und d sind in den angegebenen Richtungen Stäbe ce, cf und dg drehbar befestigt. Es sind die in den Mittellinien dieser Stäbe anzubringenden Kräfte

O, D und U zu bestimmen, welche den gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten.

Mit Hülfe eines Kraft- und Seilecks, Fig. 123 und 123a, werden zunächst in bekannnter Weise Gröfse, Richtung und Lage der Mittelkraft R der Kräfte A, K_1 und K_2 bestimmt. Die Bedingung des Gleichgewichts zwischen A, K_1 und K_2 und O, D und U erfordert, dafs die Mittelkraft der letzteren Kräfte derjenigen der erstgenannten entgegengesetzt gleich ist und mit ihr in eine gerade Linie fällt. Kehrt man also R um, so mufs $-R$ gleichwertig O, D und U sein. Im Krafteck wird $-R$ durch die Strecke 4-1 ausgedrückt. Verlängert man nun gd bis n, zieht nc und im Krafteck durch 4 und 1 $4\text{-}5 \parallel dg$ $1\text{-}5 \parallel nc$, ferner durch 1 und 5 $5\text{-}6 \parallel ce$ und $1\text{-}6 \parallel cg$, so sind $4\text{-}5 = U$, $5\text{-}6 = O$ und $6\text{-}1 = D$ die gesuchten Kräfte.

Rechnerisch gestaltet sich die Lösung wie folgt:

Da die Kräfte A, K_1 und K_2 bezw. deren Mittelkraft R mit den gesuchten O, D und U im Gleichgewicht stehen sollen, so müssen sie in Bezug auf irgend einen Drehpunkt, z. B. c die Momentensumme Null aufweisen. In der Momentengleichung kommt dann nur U als Unbekannte vor und es ergibt sich $-U \cdot l_1 + R \cdot r_1 = -U \cdot l_1 + A \cdot 3\lambda - K_1 \cdot 2\lambda - K_2 \cdot \lambda = 0$ und daraus

$$U = \frac{R \cdot r_1}{c_1} = \frac{A \cdot 3\lambda - K_1 \cdot 2\lambda - K_2 \cdot \lambda}{l_1}.$$

Wählt man ferner f und g als Drehpunkt, so ergibt sich in gleicher Weise D und O.

$$D l_2 + R \cdot r_2 = 0 \quad D = -\frac{R \cdot r_2}{l_2}$$

$$O \cdot l_3 + R \cdot r_3 = 0 \quad O = -\frac{R \cdot r_3}{l_3}.$$

Die negativen Vorzeichen von D und O deuten an, dafs der in der Figur vorläufig angenommene Richtungssinn der Kräfte D und O in Wirklichkeit entgegengesetzt zu nehmen ist.

6. Zeichnerische Ermittelung des Momentes einer beliebigen Kräftegruppe in einer Ebene.

Nach dem Satz der statischen Momente ist, wenn M_R das Moment der Mittelkraft einer gegebenen Kräftegruppe $K_1 K_2$ u. s. w. und ΣM_K die algebraische Summe der Momente dieser Einzelkräfte in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene bezeichnet

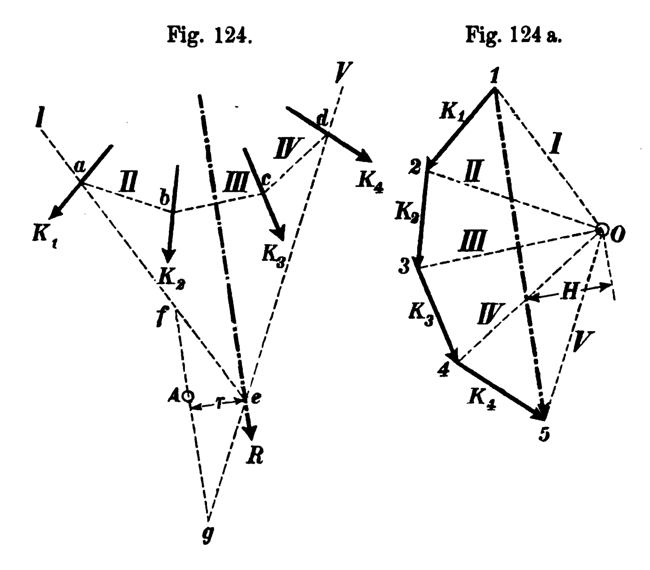
1) $$M_R = \Sigma M_K.$$

Ist nun zu der Kräftegruppe (Fig. 124) ein Krafteck 1-2-3-4-5 und unter Annahme eines beliebigen Poles 0 ein Seileck $abcde$ gezeichnet und dadurch die Mittelkraft R nach Gröfse, Richtung und Lage bekannt geworden, so ist in Bezug auf A als Drehpunkt

2) $$M_R = R \cdot r.$$

Ziehen wir nun durch A eine Parallele zu R bis zu den Schnittpunkten f und g mit den die Kräftegruppe einschliefsenden Seilecks-

Fig. 124. Fig. 124 a.



seiten I und V, so ist das entstehende Dreieck efg ähnlich dem Dreieck 1-0-5 und demnach, wenn man fg mit u bezeichnet

$$\frac{u}{r} = \frac{R}{H}, \text{ oder } R \cdot r = H \cdot u$$

und unter Beachtung der Gleichung 1

3) $$\Sigma M_K = H \cdot u.$$

Daraus ergibt sich der Satz:

Das statische Moment einer beliebigen Kräftegruppe in der Ebene ist gleich dem Produkte aus der Polweite H ihrer Mittelkraft (senkrechter Abstand des Poles von der Mittelkraft) und der Strecke, welche die äufseren, die Kräftegruppe einschliefsenden Seilecksseiten auf einer durch den Drehpunkt zur Mittelkraft gezogenen Parallelen abschneiden.

Das Vorzeichen des Momentes läfst sich aus dem Drehungssinn der Mittelkraft leicht bestimmen. In Fig. 123 dreht R rechts herum, das Moment ist also positiv zu nehmen. Die Strecke u und folglich auch das Moment $M = \Sigma M_K$ nimmt mit dem Abstande r des Drehpunktes A von der Mittelkraft verhältnisgleich

ab und zu. Fällt A auf die Richtung von R, so wird u und somit auch $M = 0$. Bewegt sich A von der einen auf die andere Seite von R, so wechseln u und M ihre Vorzeichen.

Besonders bequem gestaltet sich die Anwendung der vorbeschriebenen Regel bei Ermittelung der Momente von Parallelkräften, beispielsweise der sog. Angriffsmomente von Balken, welche vertikale Lasten zu tragen haben. Fig. 124 stellt einen solchen auf zwei Stützen A und B ruhend mit Lasten K_1, K_2 und K_3 dar. Das Krafteck und Seileck zu denselben werden in bekannter Weise gezeichnet und durch Ziehen der Linie 0-5 im Krafteck parallel zur Schlufsseite s des Seilecks die aufwärts gegen den Balken wirkenden Stützkräfte A und B gefunden. Letztere, mit den Lasten im Gleichgewicht stehend, erscheinen mit diesem gemeinsam in das Seileck $abcde$ eingeschlossen. In Bezug auf irgend einen Punkt C der Mittellinie des Balkens üben die links von demselben angreifenden Kräfte A, K_1 und K_2 ein bestimmtes Drehmoment, das sog. Angriffsmoment aus. Die Gröfse desselben findet man nach Obigem, indem man durch C eine Vertikale zieht und die Strecke u, welche die die Kräfte einschliefsenden Seilecksseiten s und III auf derselben abschneiden, mit der Polweite H multipliziert $M = u \cdot H$. Es empfiehlt sich aus Bequemlichkeitsrücksichten für H eine runde Zahl zu wählen. Macht man $H = 1$, so wird $M = u$. Das Moment wird, wie auch der Drehpunkt C gewählt werden möge, wie leicht ersichtlich, immer rechts herumdrehend, also positiv sein. Die rechts von C wirkenden Kräfte K_3 und B üben in Bezug auf den Punkt ein gleich grofses negatives Moment aus. Unter der Wirkung beider bleibt der Balken im Drehungsgleichgewicht.

Um die Momente der Einzelkräfte hervortreten zu lassen, bringen wir die Seilecksseiten I bis IV und s zum Schnitt mit tt und bezeichnen die entsprechenden Schnittpunkte mit $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ und $5'$. Die die einzelnen Kräfte A, K_1 u. s. w. einschliefsenden Seilecksseiten s und I, I und II, II und III u. s. w. schneiden dann auf tt die Strecke $1'$-$5'$, $1'$-$2'$, $2'$-$3'$ u. s. w. ab. Die Momente der Einzelkräfte links von tt sind also unter Beachtung ihrer Vorzeichen

$$M_A = H \cdot 1\text{-}5\,, \quad M_{K_1} = -H \cdot 2'\text{-}1', \quad M_{K_2} = -3'\text{-}2' \cdot H$$

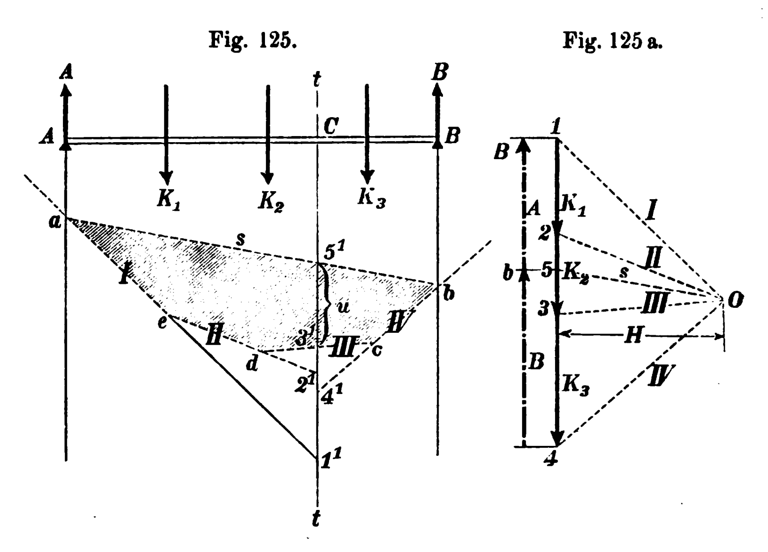
und ihre Summe

$$M = H\,(1'\text{-}5' - 2'\text{-}1' - 3'\text{-}2') = H \cdot 3'\text{-}5' = H \cdot u.$$

Ebenso die Momente der Kräfte rechts von tt

$$M = -H \cdot 5'\text{-}4' + H \cdot 4'\text{-}3' = H(4'\text{-}3' - 5'\text{-}4') = -H \cdot u.$$

Fig. 125. Fig. 125 a.



Je nach der Lage des Drehpunktes C fällt die Strecke u und somit auch das Angriffsmoment M verschieden grofs aus. Fällt C mit A zusammen, so wird u und $M = 0$. Bewegt sich C in der Richtung von A nach B, so nimmt sowohl u als M zunächst bis zu einem Gröfstwert zu, um dann wieder bis auf Null abzunehmen.

Im Falle der Fig. 124 liegt u_{max} in der Richtungslinie der Kraft K_2 und wird, wie leicht ersichtlich, immer mit der Richtung einer der Kräfte zusammenfallen. Die Fläche $abcde$, deren Umfangslinien in jeder Lage von C auf der Linie tt die Strecke u abschneiden, nennt man die der Belastung entsprechende Momentenfläche des Balkens.

7. Polaraxe zweier mit verschiedenen Polen zu einer Kräftegruppe bezeichneter Seilecke.

Die einander entsprechenden Seiten zweier mit verschiedenen Polen zu einer Kräftegruppe gezeichneten Seilecke schneiden sich auf einer Geraden, welche parallel ist zur Verbindungslinie beider Pole und welche die Polaraxe beider Seilecke genannt wird. Die Richtigkeit dieses Satzes läfst sich wie folgt beweisen:

Die Linienzüge *I*, *II*, *III*, *IV* und *I'*, *II'*, *III'*, *IV'*, Fig. 126, seien zwei mit den Polen 0 und 0' (Fig. 126a), zu den Kräften K_1, K_2, K_3 u. s. w. gezeichnete Seilecke. Denken wir uns

Fig. 126.

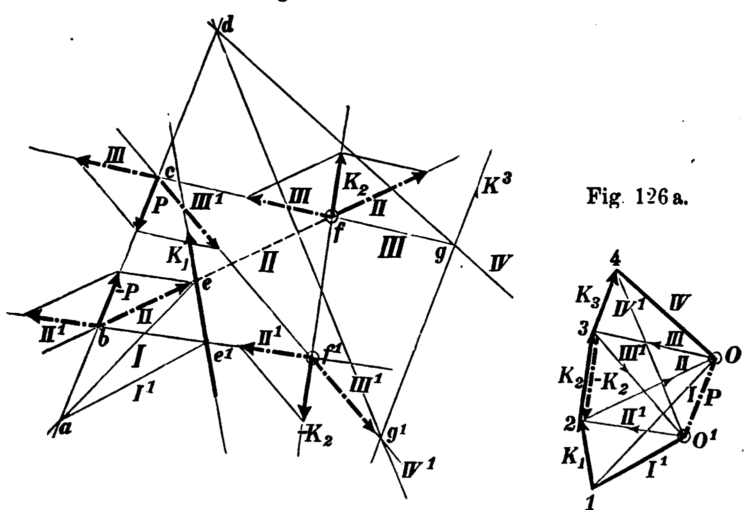


Fig. 126a.

eine der Kräfte, beispielsweise K_2 in ihrer Richtungslinie im Punkte *f* aufwärts und im Punkte *f'* als $-K_2$ abwärts wirkend, so stehen K_2 und $-K_2$ miteinander im Gleichgewicht. Ersetzen wir beide durch ihre Seitenkräfte in den Richtungen der sie einschliefsenden Seilecksseiten *II* und *III* bezw. *II'* und *III'*, so müssen auch diese vier Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen. Im Krafteck erscheinen die Seitenkräfte *II* und *III* der Kraft K_2 (Strecke 2-3) in den Polstrahlen 2-0 und 0-3 und die Seitenkräfte *II'* und *III'* der Kraft $-K_2$ (Strecke 3-2) in den Polstrahlen 3-0' und 0'-2. Vereinigen wir nun die Seitenkräfte *II* und *II'* im Schnittpunkte *b* und ebenso *III* und *III'* im Schnittpunkte *c* ihrer Richtungslinien je zu einer Mittelkraft *P*, so müssen auch diese miteinander im Gleichgewicht stehen, d. h., einander entgegengesetzt gleich sein und in derselben geraden Linie (*bc*) liegen. Im Krafteck wird die Mittelkraft von *II* und *II'* ausgedrückt durch die Linie $0\text{-}0' = P$ und die Mittelkraft von *III* und *III'*, ebenso durch die Linie $0'\text{-}0 = -P$. Die Linie *bc*, Fig. 126, mufs also parallel sein der Verbindungslinie 0-0' beider

Pole (Fig. 126a). In völlig gleicher Weise läfst sich beweisen, dafs auch die Linien ab und cd parallel 0-0' sein und dafs also die Schnittpunkte a, b, c und d der einander entsprechenden Seilecksseiten I und I', II und II' u. s. w. in der geraden Linie $abcd$ liegen müssen.

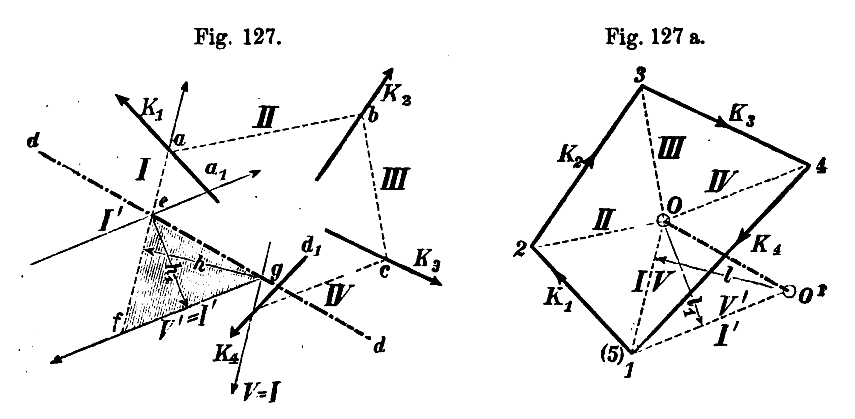
8. Graphische Merkmale für das Gleichgewicht einer Kräftegruppe.

Wie weiter oben bereits dargelegt, ist das Gleichgewicht, d. h., die gegenseitige Aufhebung einer Gruppe von Kräften in einer Ebene bedingt dadurch, dafs gleichzeitig die Mittelkraft R der Kräftegruppe und die Summe der Momente aller Einzelkräfte, oder das Moment der Mittelkraft in Bezug auf irgend einen Drehpunkt gleich Null sei.

Da die Mittelkraft einer Kräftegruppe graphisch als Schlufslinie eines aus den Kräften gezeichneten Kraftecks erhalten wird, so entspricht der ersten Bedingung $R = 0$ graphisch die Bedingung, dafs das Krafteck zum Schlufs kommt, also die Länge seiner Schlufslinie $= 0$ wird.

In Fig. 127a bilden die Kräfte K_1 bis K_4 ein schliefsendes Krafteck. Der Endpunkt 5 des Streckenzuges 1-2-3-4-5 fällt mit dem Anfangspunkte 1 zusammen; die Schlufslinie 1-5 ist $= 0$.

Fig. 127. Fig. 127 a.



Um beurteilen zu können, ob auch das Gesamtmoment der Kräftegruppe $= 0$ ist, werde mit einem beliebigen Pole 0 ein Seileck

I, *II*, *III*, *IV*, *V*, Fig. 127, gezeichnet. Dabei müssen die erste und letzte Seilecksseite *I* und *V* den im schliefsenden Krafteck zusammenfallenden Polstrahlen 0-1 und 0-5 und also auch unter sich parallel sein. Wie weiter oben dargelegt, haben wir uns in den Seilecksseiten Kräfte wirkend zu denken, welche ihrer Gröfse nach durch die entsprechenden Polstrahlen im Krafteck ausgedrückt sind und welche die gegebene Kräftegruppe in ihrer Wirkung völlig ersetzen. Diese Kräfte heben sich in den einzelnen Seilecksseiten mit Ausschlufs der ersten und letzten, hier *I* und *V*, gegenseitig auf. Die allein zurückbleibenden Kräfte *I* und *V* sind also gleichfalls der gegebenen Kräftegruppe gleichwertig. Sie sind ihrer Gröfse nach gleich und entgegengesetzt gerichtet; fallen sie also in eine gerade Linie zusammen, d. h., schliefst auch das Seileck, so heben sie sich gleichfalls auf und es besteht Gleichgewicht. Fallen sie, wie in Fig. 122, nicht in eine gerade Linie, so bilden sie ein Kräftepaar mit einem bestimmt von Null verschiedenem Moment und es kann daher Gleichgewicht nicht bestehen. Es ist nun die Frage, ob nicht etwa ein mit irgend einem anderen Pole 0^1 gezeichnetes Seileck zum Schlufs kommen und eine Aufhebung sämtlicher Seilkräfte würde eintreten können. Um diese Frage beurteilen zu können, ist es nur nötig, die erste und letzte Seite *I'* und *V'* dieses zweiten Seilecks zu zeichnen, was mit Hülfe der Polarachse leicht geschehen kann. Gibt man der ersten Seite *I'* die Lage ea_1, so ist dd, parallel zu 0-0' durch e gezogen, die Polarachse beider Seilecke, und durch den Schnittpunkt g derselben mit der Seite *V* des ersten mufs auch die Seite *V'* des zweiten Seilecks gehen. Ist nun h der senkrechte Abstand der Seiten *I* und *V* des ersten, h' derjenige der Seiten *I'* und *V'* des zweiten Seilecks, beides also die Hebelarme der Kräftepaare *I* und *I'*, so läfst sich leicht zeigen, dafs die Momente $h \cdot I$ und $h' \cdot I'$ derselben einander gleich sind und dafs daher auch bei jedem anderen zu der Kräftegruppe gezeichneten Seileck ein Kräftepaar von gleichem Moment sich ergibt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke efg, Fig. 127, und 0-1-0', Fig. 127a, mit parallelen Seiten folgt nämlich bei den aus den Figuren ersichtlichen Bezeichnungen

$$1) \qquad \frac{h}{h_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Ferner ist der Flächeninhalt des Dreiecks 0-1-0′

$$2)\qquad \frac{I \cdot l}{2} = \frac{I' \cdot l'}{2} \text{ und daraus } \frac{l}{l_1} = \frac{I'}{I}.$$

Aus Gleichung 1 und 2 aber folgt

$$\frac{h}{h_1} = \frac{I'}{I} \text{ und demnach } h \cdot I = h_1 \cdot I'.$$

Da nun I und I' stets endliche, von Null verschiedene Gröfsen sind, so mufs auch, wenn $h > 0$ stets $h' > 0$ sein, d. h., wenn irgend ein mit einem beliebigen Pole zu einer Kräftegruppe gezeichnetes Seileck nicht schliefst, kann auch kein mit einem anderen Pole gezeichnetes Seileck zum Schlufs kommen. Der mechanische Wert der Kräftegruppe ist dann gleich einem von Null verschiedenen Momente und Gleichgewicht kann nicht bestehen. Umgekehrt: schliefst ein mit irgend einem Pole gezeichnetes Seileck, so schliefst auch jedes andere; der mechanische Wert der Kräftegruppe ist gleich Null, die Kräfte befinden sich im Gleichgewicht.

Hieraus folgt: Läfst sich irgend eine Kräftegruppe zu einem schliefsenden Krafteck vereinigen und kommt auch ein zu derselben gezeichnetes Seileck zum Schlufs, so halten die Kräfte einander das Gleichgewicht und umgekehrt; ist eines der beiden Merkmale nicht vorhanden, so besteht auch zwischen den Kräften kein Gleichgewicht.

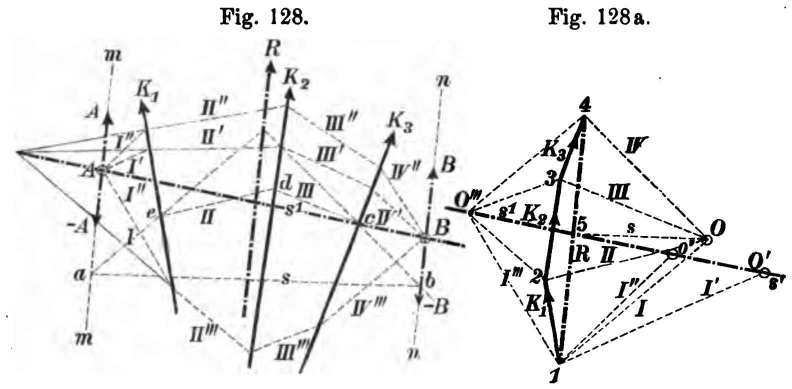
9. Zeichnung eines Seilecks durch gegebene Punkte.

Ein Seileck zu einer gegebenen Kräftegruppe ist völlig bestimmt, wenn der Pol 0 und die Lage irgend einer Seilecksseite, bezw. ein Punkt derselben gegeben ist. Der Pol selbst kann durch zwei Bestimmungsstücke, z. B. durch die Richtung und Länge eines Polstrahles, oder durch die Richtung zweier Polstrahlen, oder durch die Länge zweier Polstrahlen u. s. w. als gegeben angesehen werden. Zur Festlegung eines Seilecks sind also im ganzen drei Bestimmungsstücke erforderlich. Anstatt des durch zwei Stücke bestimmten Poles können auch zwei weitere Punkte des Seilecks gegeben sein, so dafs also ein Seileck wie ein Kreis durch drei Punkte bestimmt erscheint. Sind nur zwei Punkte gegeben, so lassen sich beliebig viele Seilecke durch dieselben zeichnen.

Bestimmung des geometrischen Ortes für den Pol eines durch zwei Punkte gehenden Seilecks.

Man zeichne zu der gegebenen Kräftegruppe K_1, K_2 und K_3 (Fig. 128 und 128a) ein Krafteck und mit beliebigem Pol 0 ein Seileck. Dadurch wird in bekannter Weise Gröſse, Richtung und Lage der Mittelkraft R bekannt. Sind nun A und B die Punkte, durch welche das gesuchte Seileck gehen soll, so ziehe man durch sie Parallelen mm und nn zur Mittelkraft R, verbinde die Schnitt-

Fig. 128. Fig. 128a.



punkte a und b derselben und der äuſseren Seilecksseiten I und IV miteinander und ziehe im Krafteck den Polstrahl 0-5 ∥ ab. Dadurch erscheint R zerlegt nach den Richtungslinien mm und nn in Seitenkräfte A und B, welchen im Krafteck die Strecken 1-5 und 5-4 entsprechen. Wie R, so sind auch die Seitenkräfte A und B der gegebenen Kräftegruppe mechanisch gleichwertig, und die ihnen entgegengesetzt gleichen Kräfte $-A$ und $-B$ stehen daher mit der Kräftegruppe im Gleichgewicht. Sie bilden mit ihr das geschlossene Krafteck 1-2-3-4-5-1, und auch das zugehörige Seileck $abcde$ ist unter Hinzutritt der Schluſslinie $ab = s$ ebenfalls zum Schluſs gekommen.

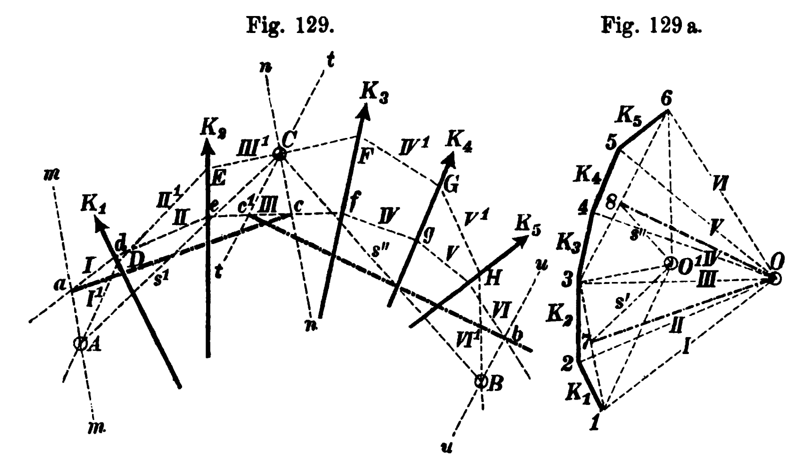
Wie weiter oben nachgewiesen, muſs nun aber auch jedes andere zu den Kräften gezeichnete Seileck schlieſsen. Legt man daher die die Kräfte A und B verbindende Seite s' in die Richtung AB, so muſs das Seileck durch die Punkte A und B gehen. Der der Seite s' entsprechende Polstrahl s' muſs parallel sein zu AB und der Pol 0′ daher auf einer durch den Punkt 5 im Krafteck gezogenen Parallelen $s_1 s_1$ zu AB liegen; diese ist somit der geometrische Ort des Poles für alle durch die Punkte A und B

zu den Kräften K_1, K_2 und K_3, $-A$ und $-B$ und mithin auch zu den Kräften K_1, K_2 und K_3 gezeichneten Seilecke s', I', II', III', IV', s', I'', II'', III'', IV'' u. s. w.

Zeichnung eines Seilecks durch drei Punkte A, B und C.

K_1, K_2, K_3, K_4 und K_5 (Fig. 129) sei die gegebene Kräftegruppe. Durch die drei Punkte A, B und C ist das Seileck völlig bestimmt und es kommt nur darauf an, den zugehörigen Pol zu ermitteln.

Fig. 129. Fig. 129 a.



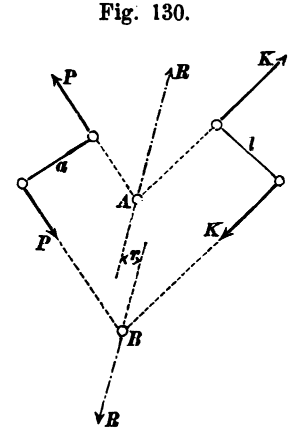
Dies geschieht, indem man in vorbeschriebener Weise je den geometrischen Ort zeichnet für den Pol der Seilecke, welche durch die Punkte A und C, und den Pol der Seilecke, welche durch die Punkte B und C gehen. Der Schnittpunkt beider (0′) ist dann der gesuchte Pol. Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich danach wie folgt:

Man füge die Kräfte zu einem Krafteck 1-2-3-4-5-6 zusammen und zeichne zunächst mit beliebigem Pol 0 ein Seileck I-II-III-IV-V-VI, verbinde im Krafteck 1 mit 3 und 3 mit 6, ziehe durch A und B Parallelen mm und nn zu 1-3, ferner durch B und C Parallelen uu und tt zu 3-6. Nun verbinde man im Seileck die Schnittpunkte a und c, sowie c' und b miteinander und ziehe im Krafteck 0-7 $\parallel ac$ und 0-8 $\parallel c'b$, verbinde endlich A mit C und B mit C und ziehe im Krafteck durch den Punkt 7 $s' \parallel AC$ und durch den Punkt 8 $s'' \parallel BC$. Die Geraden s' und s'' sind die geometrischen Orte des Poles, und ihr Schnittpunkt 0′ ist der gesuchte Pol. Der Linienzug $ADECFGHB$ ist das gesuchte Seileck.

10. Zusammensetzung von Kräftepaaren.

Sind in einer Ebene zwei Kräftepaare von den Momenten Kl und $-Pa$ gegeben (Fig. 130), so kann man die im Punkt A sich schneidenden Kräfte K und P durch eine Mittelkraft R ersetzen und ebenso die anderen beiden, welche sich in B schneiden. Die beiden Kräfte R sind gleich und entgegengesetzt, bilden daher im allgemeinen ein Kräftepaar vom Moment Rr. Wendet man den Satz der Drehmomente auf die in A sich schneidenden Kräfte an, bezogen auf B als Drehpunkt, so wird $Rr = Kl - Pa$. Die beiden gegebenen Kräftepaare von entgegengesetztem Sinne lassen sich hiernach durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich dem Unterschiede der Momente der gegebenen Kräftepaare ist und dessen Sinn mit dem des stärkeren Kräftepaares übereinstimmt. Für $Kl = Pa$ entsteht $Rr = 0$, d. h. $r = 0$. Die Kräfte R fallen dann in dieselbe Gerade und heben sich auf. Daraus folgt der Satz:

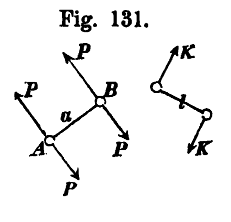
Fig. 130.



Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetztem Sinne heben sich auf.

Ist nun ein Kräftepaar Kl gegeben (Fig. 131), so kann man in derselben Ebene an einem beliebigen Punkt A zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte P hinzufügen, ebenso im Punkte B. Wählt man die Lage der Punkte A und B so, daſs $Pa = Kl$ ist, so hebt das Kräftepaar Pa mit negativem Drehsinne das gegebene Kl auf, und es bleibt ein Kräftepaar $Pa = Kl$ mit positivem Drehsinn übrig, welches mit dem gegebenen Kl gleichwertig ist, und man hat den Satz:

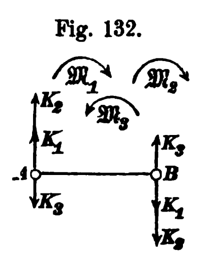
Fig. 131.



Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und gleichem Drehsinne haben gleiche Wirkung.

Hiernach ist die Wirkung des Kräftepaares gar nicht von der Gröfse der Kräfte K, von ihrer Richtung und Lage, sondern nur von dem Momente, dem Drehsinne und der Wirkungsebene abhängig; ein Kräftepaar in einer bestimmten Ebene ist daher durch einen Drehungspfeil ⌒ und die Momentengröfse $\mathfrak{M}$ genügend gekennzeichnet. Sind nun in der Zeichenebene mehrere Kräftepaare gegeben, etwa $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ von positivem, $\mathfrak{M}_3$ von negativem Sinne (Fig. 132), so kann man sie zu einem einzigen Paare vereinigen; hierzu wählt man einen Arm $l = AB$, macht $K_1 = \mathfrak{M}_1 : l$ und stellt $\mathfrak{M}_1$ durch zwei Kräfte K_1 dar, die an den Punkten A und B angreifen. An denselben Punkten und mit denselben Richtungen kann man zwei Kräfte $K_2 = \mathfrak{M}_2 : l$ anbringen als Darstellung von $\mathfrak{M}_2$, ebenso zwei Kräfte $K_3 = \mathfrak{M}_3 : l$ mit entgegengesetzten Richtungen. In A kann man die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 zu einer Mittelkraft $R = K_1 + K_2 - K_3$ zusammensetzen, ebenso an B. R und R bilden ein Kräftepaar von dem Moment:

Fig. 132.



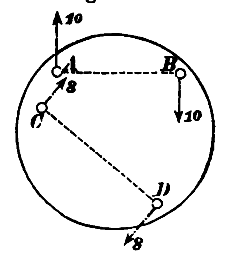
$$\mathfrak{M} = Rl = K_1 l + K_2 l - K_3 l = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3,$$

woraus sich ergibt:

Mehrere in derselben Ebene wirkende Kräftepaare können zu einem einzigen Paar in derselben Ebene zusammengesetzt werden, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Einzelmomente ist.

War $\mathfrak{M}_1 = 12$ mkg; $\mathfrak{M}_2 = 24$ mkg; $\mathfrak{M}_3 = -20$ mkg und wählt man $l = 1$ m, so wird $K_1 = 12$ kg; $K_2 = 24$ kg; $K_3 = -20$ kg, mithin $R = 12 + 24 - 20 = 16$ kg und das daraus entstehende Kräftepaar $\mathfrak{M} = 16$ mkg.

Fig. 133.



Sind an einem Holzklotze (Fig. 133) die vorstehenden Griffe A und B in 0,16 m Entfernung angebracht, ebenso C und D in 0,2 m Abstand, und übt man an A und B mit den Händen die Kräfte 10 kg aus, also das Moment $10 \cdot 0{,}16 = 1{,}6$ mkg, so kann man ganz dieselbe Wirkung erreichen, wenn man an C und D ein Kräftepaar, bestehend aus zwei Kräften von 8 kg, angreifen läfst. Das zweite Kräftepaar würde, in entgegengesetzter Richtung angebracht, die Wirkung des ersteren völlig aufheben, so dafs der Körper sich so verhalten würde, als ob die Kräftepaare gar nicht vorhanden wären. In diesen Beziehungen wird nichts

geändert, wenn man dem Klotze etwa eine feste Drehachse, rechtwinklig zur Bildebene, gibt. Wo die Achse auch liegen mag, — gleichwertige Kräftepaare werden um diese Achse stets dasselbe Drehungsbestreben haben, während gleiche entgegengesetzte Kräftepaare sich stets gegenseitig tilgen werden.

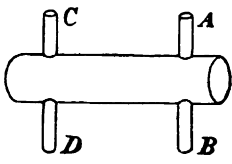
Auch in eine Parallelebene kann man ein Kräftepaar verschieben, ohne in der Wirkung etwas zu ändern. An einem starren Parallelepiped (Fig. 134) seien die in den Punkten A und B der rechtsseitigen Stirnebene angreifenden Kräfte K gegeben, welche ein Paar bilden. In den Punkten C und D der linksseitigen Stirnebene, welche mit A und B ein Rechteck bilden, füge man je 2 gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte K hinzu, dann haben die jetzt vorhandenen 6 Kräfte die gleiche Wirkung, wie die beiden gegebenen. Die beiden Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ halbieren sich gegenseitig in E. Die in A und C angreifenden aufwärts gerichteten Kräfte K kann man durch ihre Mittelkraft $2\,K$ im Punkt E ersetzen, ebenso die beiden in B und D angreifenden abwärts gerichteten. Da nun die beiden durch E gehenden Kräfte $2\,K$ sich aufheben, so bleiben nur noch die in der linksseitigen Stirnebene, bei D aufwärts, bei C abwärts wirkenden Kräfte übrig, welche dem gegebenen Kräftepaare gleichwertig sind.

Fig. 134.

Hat ein Körper 2 Arme AB und CD (Fig. 135), so ist es für die Bewegung von gleicher Wirkung, ob man mit den Händen in A und B oder in C und D angreift.

Diese Betrachtung führt dann mit den früheren Sätzen zu dem Ergebnisse:


Fig. 135.

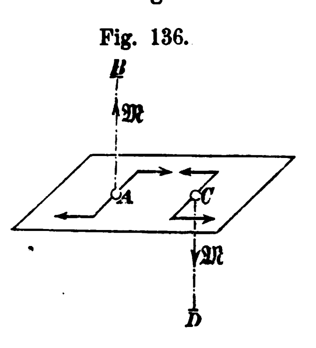


Kräftepaare mit parallelen Drehungs-Ebenen können durch ein einziges Paar ersetzt werden, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Paare ist und zu dessen Drehungsebene irgend eine den gegebenen parallele Ebene gewählt wird.

Hiernach gehört eine bestimmte Drehungsebene gar nicht zu den kennzeichnenden Eigenschaften eines Kräftepaares, sondern die

Richtung seiner Drehungsebene. Zwei andere Merkmale sind die Gröſse des Momentes und der Drehungssinn. Diese drei lassen sich geometrisch mittels einer einzigen Geraden darstellen. Man errichtet eine Rechtwinklige zu der gegebenen Drehungsebene und bezeichnet sie als Achse des Kräftepaares. Jede zur Achse rechtwinklige Ebene kann dann zur Drehungsebene gewählt werden. Die Gröſse des Momentes läſst sich nach irgend einem Maſsstab als Länge auf der Achse abtragen (Fig. 136). Diese Länge werde von der Ebene aus auf der Achse in solchem Sinn aufgetragen, daſs wenn man von dem Endpunkt auf die Ebene blickt, der Drehsinn als rechtsherum erscheint. Der Endpunkt aber läſst sich kennzeichnen, indem man auf der Achse eine nach dem Endpunkte weisende Pfeilspitze anbringt. Das bei A wirkende Kräftepaar (Fig. 136) erscheint, von oben betrachtet, rechts drehend, von der Unterseite der Ebene aber erblickt man das Spiegelbild mit der Drehung links herum (ebenso wie das Spiegelbild einer Uhr oder eine Uhr mit durchscheinendem Zifferblatte, von der Rückseite betrachtet, eine Linksdrehung der Zeiger erkennen läſst). Daher muſs der Endpunkt B der Achse AB oberhalb A liegen, durch eine aufwärts weisende Pfeilspitze also B als Endpunkt gekennzeichnet werden, während es für das bei C wirkende Paar gerade umgekehrt ist. Diese mit bestimmten Pfeilrichtungen versehenen Linien AB und CD nennt man die Achsenstrecken der betr. Kräftepaare. Es läſst sich nun weiter zeigen, daſs die Zusammensetzung von Kräftepaaren auch in sich schneidenden Ebenen mit Hülfe ihrer Achsenstrecken nach denselben Regeln wie die Zusammensetzung von Einzelkräften erfolgen kann. Dabei bietet sich noch die Erleichterung, daſs, während eine Einzelkraft eine bestimmte Lage hat, die Achsenstrecke an irgend einem Punkte der Drehungsebene errichtet werden konnte, sich also auch beliebig parallel verschieben läſst.

Fig. 136.

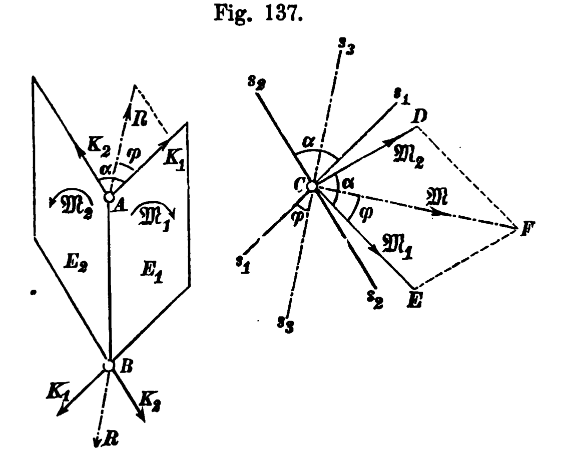


Es seien nun in zwei sich in der Geraden AB unter dem Winkel α schneidenden Ebenen E_1 und E_2 (Fig. 137) die Kräftepaare $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ mit den durch die Drehungspfeile bezeichneten Drehungssinnen gegeben. Man führe sie beide auf den Arm $AB = l$ zurück, so daſs $K_1 l = \mathfrak{M}_1$;

$K_2 l = \mathfrak{M}_2$. In A kann man K_1 und K_2 zur Mittelkraft R zusammensetzen, welche mit K_1 den Winkel φ bildet. In B erscheint dann die gleiche entgegengesetzte Parallelkraft R, und man hat an Stelle der beiden gegebenen Paare ein einziges mit dem Moment Rl.

Wendet man aber auf die Achsenstrecken der Kräftepaare die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte an, so gelangt man zu dem gleichen Ergebnisse. Eine Grundrifsebene möge die Ebenen E_1 und E_2 rechtwinklig schneiden, dann schliefsen die Spuren s_1 und s_2 der Ebenen den Winkel α ein. Zeichnet man nun die Achsenstrecke des Paares $\mathfrak{M}_1$, so wird diese gemäfs dem früheren von C nach E gerichtet sein müssen: man mache $CE = \mathfrak{M}_1$. Ebenso ist $CD = \mathfrak{M}_2$ die Achse des zweiten Paares. Behandelt man $CE = \mathfrak{M}_1$ und $CD = \mathfrak{M}_2$ wie zwei Einzelkräfte, zeichnet aus ihnen ein Parallelogramm mit CF als Mittelkraft, so ist dieses Parallelogramm ähnlich dem aus K_1 und K_2 gezeichneten; seine Seiten haben die $l$fache Länge des letzteren und stehen zu ihnen rechtwinklig. Daher ist auch $CF = Rl$, d. h. gleich dem Momente des resultierenden Kräftepaares, und steht rechtwinklig auf der Ebene desselben. Von F aus betrachtet erscheint das Paar Rl rechts drehend; mithin hat CF alle Eigenschaften der Achsenstrecke des resultierenden Paares $\mathfrak{M}$, und eine Ebene mit der Spur s_3, rechtwinklig zu CF, würde als Wirkungsebene von $\mathfrak{M}$ gewählt werden können.

Fig. 137.



Da das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte unmittelbar zum Parallelepiped-Gesetze führte, so mufs letzteres auch für Kräftepaar-Achsen gelten. Danach sind auch die zur Zusammensetzung von Kräften an einem Punkt auf S. 40 angegebenen Verfahren unmittelbar auf solche Achsen zu übertragen. Oder:

Kräftepaare in beliebigen Ebenen lassen sich wie Kräfte, die an einem Punkt angreifen, mit Hülfe ihrer

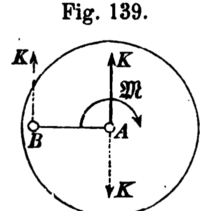
Achsenstrecken zusammensetzen, indem man letztere parallel an einen gemeinsamen Schnittpunkt verschiebt und wie Einzelkräfte behandelt.

Parallelverschiebung einer Kraft. Greift in einem Punkt A eine Kraft K an (Fig. 138), so kann man zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K in B hinzufügen; von den drei Kräften bilden nun die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = Kl$, und aufserdem bleibt eine mit der gegebenen gleichgesinnte Kraft K übrig, welche um l gegen die ursprüngliche Lage verschoben ist. Die Parallelverschiebung einer Kraft K um die Entfernung l bedingt also die Hinzufügung eines Paares Kl.

Fig. 138.

Sind aber in einer Ebene eines starren Körpers eine Einzelkraft K in A mit dem Sinn aufwärts und ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ gegeben (Fig. 139), so bringe man $\mathfrak{M}$ auf die Form $\mathfrak{M} = Kl$, lege die eine Kraft K des Paares so durch A, dafs sie mit der gegebenen entgegengesetzten Sinn hat, sich also damit aufhebt, und die andere in den Abstand $AB = l = \mathfrak{M} : K$; dann bleibt letztere, durch B gehende Kraft K allein übrig.

Fig. 139.



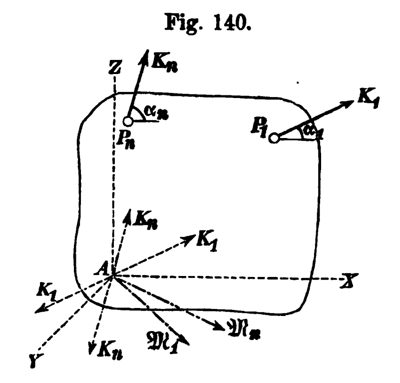
Ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ setzt sich also in derselben Ebene mit einer Einzelkraft K zusammen zu einer Kraft K, welche um $l = \mathfrak{M} : K$ gegen die gegebene Kraft K verschoben ist.

11. Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenen Angriffspunkten.

Greifen an einem starren Körper beliebige Kräfte $K_1, \ldots K_n$ an (Fig. 140), von denen der Einfachheit wegen nur K_1 und K_n gezeichnet werden sollen, so wähle man zum Zwecke möglichster Vereinigung derselben einen beliebigen Punkt A und füge in diesem zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K_1 hinzu; dann bilden die gegebene K_1 und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar, dessen Drehungsebene durch K_1 in P_1 und den Punkt A gegeben

ist, und dessen Hebelarm l_1 der rechtwinklige Abstand der in P_1 wirkenden Kraft K_1 vom Punkt A ist. Dieses Paar läfst sich durch seine Achsenstrecke $\mathfrak{M}_1$ darstellen, welche wir durch A legen können. Ebenso verfährt man mit allen übrigen gegebenen Kräften, zuletzt mit K_n. Dann erhält man statt der gegebenen, am Körper zerstreut angreifenden n Kräfte: n Kräfte, deren Richtung, Gröfse und Sinn mit den gegebenen übereinstimmen, welche aber sämtlich in dem gemeinsamen Schnittpunkt A angreifen, und ebensoviele Kräftepaar-Achsenstrecken, die man sämtlich von A ausgehen lassen kann. Die Einzelkräfte K lassen sich wie auf S. 40 zusammensetzen Sind α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Neigungswinkel der gegebenen Kräfte gegen die positive x-Richtung, β_1, $\beta_2 \ldots \beta_n$ und γ_1, $\gamma_2 \ldots \gamma_n$ diejenigen gegen die y-Richtung, bezw. z-Richtung, so ergibt sich

Fig. 140.



1) in der Linie AX eine Kraft $X = \Sigma K \cos \alpha$,

2) in AY „ „ $Y = \Sigma K \cos \beta$,

3) in AZ „ „ $Z = \Sigma K \cos \gamma$,

welche sich zu

4) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

5) $$\cos \alpha = X : R; \quad \cos \beta = Y : R; \quad \cos \gamma = Z : R$$

zusammensetzen.

Sind die Richtungswinkel der Kräftepaar-Achsen bezw. δ_1 ε_1, η_1, ... δ_n, ε_n, η_n, so ergibt sich

in AX eine Achse $\mathfrak{M}_x = \Sigma \mathfrak{M} \cos \delta$,

„ AY „ „ $\mathfrak{M}_y = \Sigma \mathfrak{M} \cos \varepsilon$,

„ AZ „ „ $\mathfrak{M}_z = \Sigma \mathfrak{M} \cos \eta$,

welche sich zu einer resultierenden Achsenstrecke

6) $$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

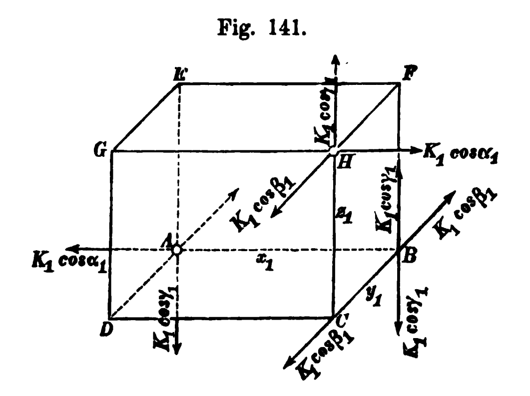
$$7) \qquad \cos\delta = \mathfrak{M}_x : \mathfrak{M}; \quad \cos\varepsilon = \mathfrak{M}_y : \mathfrak{M}; \quad \cos\eta = \mathfrak{M}_z : \mathfrak{M}$$

zusammensetzen. Somit haben wir die beliebigen Kräfte zurückgeführt auf eine resultierende, durch A gehende Einzelkraft R und ein resultierendes Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M}$.

Die Kraft R ist aus den gegebenen Einzelkräften K völlig bestimmt; die Achsenstrecke $\mathfrak{M}$ ist aber noch nicht auf unmittelbar gegebene Gröfsen zurückgeführt. Es soll daher der Beitrag einer der gegebenen Kräfte, etwa K_1, zu der Achsenstrecke $\mathfrak{M}_x$ näher bestimmt werden.

Der Angriffspunkt H von K_1 (Fig. 141) habe die Koordinaten x_1, y_1, z_1, aus denen wir ein rechtwinkliges Parallelepiped zeichnen. Zerlegen wir K_1 in seine drei rechtwinkligen Seitenkräfte und bringen auch in A dieselben Kräfte entgegengesetzten Sinnes an, so bilden die beiden Kräfte $K_1 \cos\gamma_1$ ein Paar, welches in einer Diagonalebene $ACHE$ wirkt. Zur Vereinfachung fügen wir im Punkte B noch zwei solche sich aufhebende Kräfte hinzu; die in A abwärts, und die in B aufwärts wirkende Kraft bilden ein in der xz-Ebene wirkendes Paar, dessen Achse in AY fällt, mithin zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag liefert. Die in H aufwärts, in B abwärts wirkenden $K_1 \cos\gamma_1$ liegen aber in der Seitenebene $BCHF$, haben, von rechts aus betrachtet, positiven Drehsinn, so dafs ihre Achsenstrecke in der Gröfse $K_1 \cos\gamma_1 \, y_1$ auf der AX aufzutragen ist.

Fig. 141.



Auch zu den beiden $K_1 \cos\beta_1$ fügen wir in B und C noch zwei sich aufhebende hinzu. Die eine hiervon bildet mit der in A angreifenden ein Kräftepaar in der Ebene $ABCD$, dessen Achse in die AZ fällt, also zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag liefert; die in H und B angreifenden aber bilden mit dem Abstande z_1 ein Kräftepaar,

dessen Drehsinn von rechts betrachtet negativ ist, dessen Beitrag zu $\mathfrak{M}_x$ also ebenfalls negativ sein mufs, nämlich $- K_1 \cos \beta_1 z_1$.

Die beiden in A und H angreifenden Kräfte $K_1 \cos \alpha$ liefern zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag, denn ihre Wirkungsebene ist die Diagonalebene $AGHB$, so dafs die Achse in der yz-Ebene, mithin rechtwinklig zu AX liegt.

Der gesamte Beitrag der Kraft K_1 zu $\mathfrak{M}_x$ ist also

$$K_1 \cos \gamma_1 y_1 - K_1 \cos \beta_1 z_1 .$$

Die Beiträge der übrigen Kräfte ergeben sich in entsprechender Form, so dafs im ganzen

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma K \cos \gamma y - \Sigma K \cos \beta z \quad \text{wird.} \tag{8}$$

In gleicher Weise erhält man für die anderen Richtungen

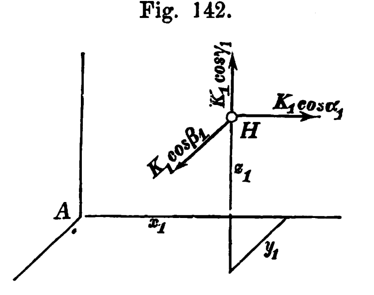
$$\mathfrak{M}_y = \Sigma K \cos \alpha z - \Sigma K \cos \gamma x \quad \text{und} \tag{9}$$

$$\mathfrak{M}_z = \Sigma K \cos \beta x - \Sigma K \cos \alpha y . \tag{10}$$

Hiermit ist die Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte gelöst.

$\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ bedeuteten die Achsenstrecken von Kräftepaaren; es läfst sich die Bedeutung derselben aber noch einfacher ausdrücken. Zu dem Zwecke wollen wir das Drehmoment der Kraft K_1 in Bezug auf die Achse AX ermitteln. Wir können für dasselbe nach dem Satze der Momente (S. 100) die Summe der Momente der in H angreifenden Einzelkräfte $K_1 \cos \gamma_1$, $K_1 \cos \beta_1$ und $K_1 \cos \alpha_1$ setzen. Die Seitenkraft $K_1 \cos \gamma_1$ (Fig. 142) kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstand y_1, hat daher das Moment $K_1 \cos \gamma_1 y_1$. und zwar, von rechts gesehen, positiv drehend; $K_1 \cos \beta_1$ kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstande z_1, und zwar, von rechts gesehen, negativ drehend, hat daher das Moment $- K_1 \cos \beta_1 z_1$; $K_1 \cos \alpha_1$ aber ist mit AX parallel, hat also (nach S. 100) in Bezug auf AX kein Moment. Das Moment der ursprünglich gegebenen Kraft K_1 in Bezug auf AX ist demnach $K_1 \cos \gamma_1 y_1 - K_1 \cos \beta_1 z_1$, stimmt also mit dem Beitrage der Kraft K_1 zu der Achsenstrecke $\mathfrak{M}_x$

Fig. 142.



überein. Hiernach können die Kräftepaar-Achsenstrecken $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ gedeutet werden als die Momentensummen der ursprünglich gegebenen Kräfte K in Bezug auf die Achsen AX, AY und AZ.

Führt die Zusammensetzung einer zweiten an einem starren Körper etwa angreifenden Kräftegruppe unter Benutzung desselben Koordinaten-Ursprunges A auf dieselbe Einzelkraft R und dasselbe Kräftepaars-Moment $\mathfrak{M}$ wie die Zusammensetzung der ersten Kräftegruppe, so sind beide Kräftegruppen einander gleichwertig, also miteinander zu vertauschen; sie bringen die gleiche Bewegungswirkung an dem starren Körper hervor.

Aus dem vorstehenden ergeben sich als **Bedingungen für die Gleichwertigkeit zweier Kräftegruppen**, dafs in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz

1) die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung parallel zu jeder Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte für beide Kräftegruppen die gleiche ist, und dafs zugleich

2) die algebraische Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede der Achsen für beide Kräftegruppen denselben Wert ergibt.

12. Zentralachse einer Kräftegruppe.

Die Zusammensetzung einer beliebigen räumlichen Kräftegruppe hat (S. 136) auf R und $\mathfrak{M}$ geführt. R ist einfach die Mittelkraft, die sich bei Parallelverschiebung aller Kräfte an einen Punkt ergab, mithin unabhängig von der Wahl des beliebig angenommenen Punktes A. $\mathfrak{M}$ dagegen (S. 136 u. 138) ist von den Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein durch A gelegtes Achsenkreuz abhängig, wird daher mit einer Verschiebung des Sammelpunktes A sich ändern. Hat man für einen angenommenen Sammelpunkt A die Mittelkraft R gefunden, so wird eine Verschiebung von A auf der Richtungslinie von R keine Änderung von $\mathfrak{M}$ zur Folge haben, weil man ja jeden Punkt dieser Richtungslinie als Angriffspunkt von R behandeln kann. Verschiebt man aber A nach einer aufserhalb R

gelegenen Stelle, entsprechend einer Parallelverschiebung von R selbst, so mufs das zugehörige Achsenmoment $\mathfrak{M}$ eine Änderung erfahren.

Um diese Veränderung möglichst einfach zu übersehen, wählen wir die Richtungslinie der im Punkt A erhaltenen Kraft R zur z-Achse (Fig. 143) und legen durch R und die zugehörige von A aus gezogene Momentenachse $\mathfrak{M}$ eine xz-Ebene. $\mathfrak{M}$ bilde mit R den Winkel λ. Will man nun die durch A gehende Kraft R mit einer gleichen Kraft R vertauschen, welche die xy-Ebene in einem Punkte P mit dem Abstand $AP = r$ schneidet, so bringe man in P zunächst zwei sich aufhebende Kräfte R und $-R$ an. Dann bilden R in A und $-R$ in P ein Kräftepaar, dessen Achsenstrecke Rr in der xy-Ebene liegt und von AY um den Winkel α nach links abweicht, wenn AP mit AX den Winkel α bildet. Diese Achsenstrecke Rr mufs nun mit $\mathfrak{M}$ zusammengesetzt werden. Zu dem Zwecke zerlegen wir $\mathfrak{M}$ und Rr nach den drei Achsen und erhalten

Fig. 143.

in der x-Achse: $\mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin \alpha$,

in der y-Achse: $Rr \cos \alpha$,

in der z-Achse: $\mathfrak{M} \cos \lambda$.

Aus diesen Einzelmomenten entsteht dann das neue Gesamtmoment

$$\mathfrak{M}_1 = \sqrt{(\mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin \alpha)^2 + (Rr \cos \alpha)^2 + (\mathfrak{M} \cos \lambda)^2}.$$

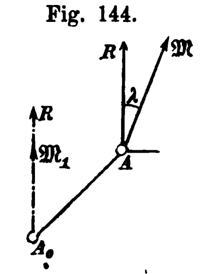
Hiernach ist $\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M} \cos \lambda$. Es ist aber eine solche Verschiebung von R, d. h. eine solche Wahl des Punktes P möglich, dafs $\alpha = 90^0$ und zugleich $Rr \sin \alpha = \mathfrak{M} \sin \lambda$ wird. Dann fallen in der letzten Gleichung die von r und α abhängigen Summanden fort, und es wird einfach

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda.$$

Weil nun allgemein $\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M} \cos \lambda$ war, bei der angegebenen Wahl von r und α aber $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda$ wird, so ist unter diesen Umständen das sich ergebende Achsenmoment $\mathfrak{M}_1$ so klein wie

möglich; und weil $\mathfrak{M}_1$ gleichbedeutend ist mit dem in die z-Achse fallenden Momente, während die in AX und AY fallenden Momente aufgehoben werden, so ist $\mathfrak{M}_1$ nunmehr parallel der AZ, fällt also mit der Richtung von R zusammen. $\alpha = 90^0$ bedeutet, daſs P, der Punkt der neuen Lage von R, auf AY liegen muſs, in einem Punkte A_0 (Fig. 144), und zwar muſs wegen $R r \sin\alpha = \mathfrak{M} \sin\lambda$, die Parallelverschiebung der Kraft R, nämlich der Abstand $AA_0 = r = \mathfrak{M} \sin\lambda : R$ sein. Die durch A_0 gelegte Richtungslinie von R heiſst die Zentralachse der gegebenen Kräftegruppe. Das Ergebnis dieser Untersuchung fassen wir noch wie folgt zusammen:

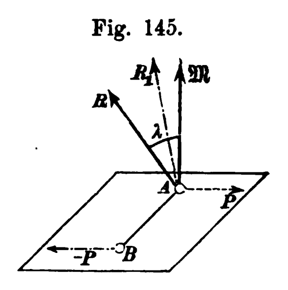
Fig. 144.



Eine an einem starren Körper wirkende Kräftegruppe läſst sich auf unendlich viele Arten zu einer Mittelkraft R und einem Kräftepaar oder Achsenmoment $\mathfrak{M}$ zusammenfassen. Bei allen diesen Arten ist R nach Gröſse, Richtung und Sinn dieselbe; nur ihre Lage ist verschieden; das Moment $\mathfrak{M}$ ist im allgemeinen nach Gröſse, Richtung und Sinn verschieden. Unter den verschiedenen Lagen von R gibt es eine, die **Zentralachse** der Kräftegruppe, bei welcher das Achsenmoment so klein wie möglich wird und mit der Richtung von R zusammenfällt.

Steht die ursprünglich gefundene Momentenachse $\mathfrak{M}$ rechtwinklig zu R, ist also $\lambda = 90^0$, so wird $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos\lambda = 0$ und $r = \mathfrak{M} : R$; d. h. in diesem Falle verschwindet das Achsenmoment $\mathfrak{M}_1$, und die gegebene Kräftegruppe hat sich auf eine Einzelkraft R zurückführen lassen. (Vergl. S. 135, Fig. 139.)

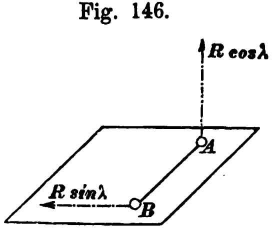
Fig. 145.



Eine beliebige Kräftegruppe läſst sich auch stets auf zwei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte zurückführen. Ist nämlich das Ergebnis der ersten Zusammenfassung etwa R und $\mathfrak{M}$ im Punkt A (Fig. 145), so kann man $\mathfrak{M}$ in die Faktoren $P.r$ zerlegen, wobei man die eine Kraft P durch A legt, $AB = r$ macht und $-P$ durch B gehen läſst. P und R kann man nun

zu R_1 zusammensetzen, so dafs R_1 und $-P$ der gegebenen Kräftegruppe gleichwertig sind. Dabei war die Gröfse P beliebig gewählt. Macht man aber $P = R \sin \lambda$, so fällt die Kraft R_1 in die Richtung von $\mathfrak{M}$ und bekommt die Gröfse $R \cos \lambda$ (Fig. 146), während die durch B gelegte Kraft $P = R \sin \lambda$ ist. Hiernach ist die Zurückführung einer Kräftegruppe auf zwei im Raume sich rechtwinklig kreuzende Kräfte möglich.

Fig. 146.



Diese Kräfte, auf welche sich eine gegebene Kräftegruppe zurückführen läfst, welche mithin der Kräftegruppe gleichwertig sind, entsprechen den auf S. 139 entwickelten allgemeinen Bedingungen für die Gleichwertigkeit von Kräftegruppen, haben also im besonderen auch in Bezug auf irgend eine Achse die gleiche Momentensumme wie die gegebene Kräftegruppe.

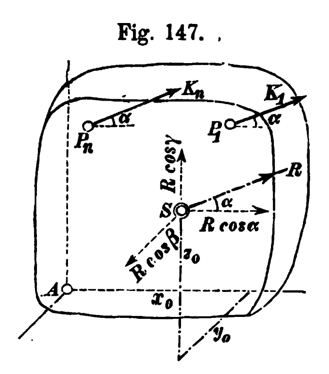
13. Zusammensetzung von Parallelkräften gleichen Sinnes im Raume.

Ist (Fig. 147)
$$\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_n = \alpha,$$
$$\beta_1 = \beta_2 \ldots = \beta_n = \beta,$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 \ldots = \gamma_n = \gamma,$$
so wird nach S. 136
$$X = \cos \alpha \, \Sigma K; \quad Y = \cos \beta \, \Sigma K; \quad Z = \cos \gamma \, \Sigma K,$$
$$\text{mithin } R = \Sigma K$$
für die bei der Zurückführung auf den Punkt A sich ergebende Einzelkraft. Aufserdem entstehen nach S. 136 die Achsenstrecken:
$$\mathfrak{M}_x = \cos \gamma \, \Sigma K y - \cos \beta \, \Sigma K z,$$
$$\mathfrak{M}_y = \cos \alpha \, \Sigma K z - \cos \gamma \, \Sigma K x,$$
$$\mathfrak{M}_z = \cos \beta \, \Sigma K x - \cos \alpha \, \Sigma K y.$$

Die Parallelkräfte müssen sich aber auch auf eine Kraft $R = \Sigma K$ ohne Achsenmoment zurückführen lassen; denn wenn man die Parallelkräfte der Reihe nach vereinigt, gelangt man stets

zu einer Einzelkraft; es kommt nur noch darauf an, deren Lage aufzufinden. Ein Punkt S derselben werde durch die unbekannten Koordinaten x_0, y_0, z_0 bezeichnet. Diese durch den Punkt S gehende Einzelkraft R mufs nun gleichwertig sein mit dem Ergebnisse der ersten Zusammensetzung mit Hülfe des Punktes A, oder, weil die Achsenmomente nach S. 136 gleichbedeutend sind mit den statischen Momenten der Kräfte in Bezug auf die Koordinatenachsen, so mufs die in S angreifende Kraft R, welche in die Seitenkräfte $R \cos\alpha$, $R \cos\beta$, $R \cos\gamma$ zerlegt werden kann, die statischen Momente $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ haben. In Bezug auf AX hat $R \cos\gamma$ das Moment $R \cos\gamma\, y_0$, $R \cos\beta$ das Moment $-R \cos\beta\, z_0$, $R \cos\alpha$ das Moment Null. Daher mufs sein:

Fig. 147.



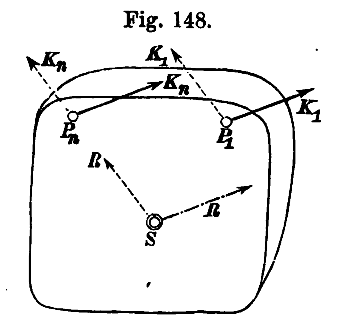
$$R \cos\gamma\, y_0 - R \cos\beta\, z_0 = \cos\gamma\, \Sigma K y - \cos\beta\, \Sigma K z;$$
$$R \cos\alpha\, z_0 - R \cos\gamma\, x_0 = \cos\alpha\, \Sigma K z - \cos\gamma\, \Sigma K x;$$
$$R \cos\beta\, x_0 - R \cos\alpha\, y_0 = \cos\beta\, \Sigma K x - \cos\alpha\, \Sigma K y.$$

Diesen Gleichungen wird genügt durch $R x_0 = \Sigma K x$; $R y_0 = \Sigma K y$; $R z_0 = \Sigma K z$; denn durch Einsetzung dieser Werte werden beide Seiten der drei Gleichungen einander gleich. Die Koordinaten des Punktes S werden hiernach

$$1)\qquad x_0 = \frac{\Sigma K x}{\Sigma K}; \qquad y_0 = \frac{\Sigma K y}{\Sigma K}; \qquad z_0 = \frac{\Sigma K z}{\Sigma K}.$$

Da diese Werte ganz unabhängig von den Richtungswinkeln α, β, γ der gegebenen Kräfte, nur abhängig sind von den Kraftgröfsen K und von den auf ihren Richtungslinien gewählten Angriffspunkten P (der Koordinaten x, y, z), so bleibt S unverändert, wenn die Parallelkräfte K sich um die Angriffspunkte P drehen. Während einer solchen Drehung der gegebenen Parallelkräfte (Fig. 148) dreht sich also die Mittelkraft $R = \Sigma K$

Fig. 148.



um den Punkt S, welcher aus diesem Grunde der Mittelpunkt der in den Punkten P angreifenden Parallelkräfte heifst.

In Gemäfsheit mit S. 139 mufs in Bezug auf irgend eine Achse das Moment der Mittelkraft gleich der Momentensumme der Einzelkräfte sein.

14. Mittelpunkt der Massen (Schwerpunkt) eines starren Körpers.

Es möge die Gruppe der Parallelkräfte gleichen Sinnes derartig über die Masse des Körpers verteilt sein, dafs an jedem Massenteilchen eine der Masse verhältnisgleiche Kraft angreife. Dann können die an den Massenteilchen $m_1, m_2 \ldots m_n$ auftretenden Kräfte geschrieben werden: $m_1 p, m_2 p \ldots m_n p$. Es würde dann p die gemeinsame Beschleunigung sein, welche die Massenteilchen durch die Kräfte erfahren würden.

Die Abscisse des Mittelpunktes S dieser Parallelkräfte ist dann $x_0 = \frac{\Sigma m p x}{\Sigma m p}$; die Bedeutung der Σ-Zeichen erhellt aus der Form:

$$x_0 = \frac{m_1 p x_1 + m_2 p x_2 + \ldots m_n p x_n}{m_1 p + m_2 p + \ldots m_n p};$$

hierin hebt sich dann p als gemeinsamer Faktor im Zähler und Nenner fort, und es bleibt:

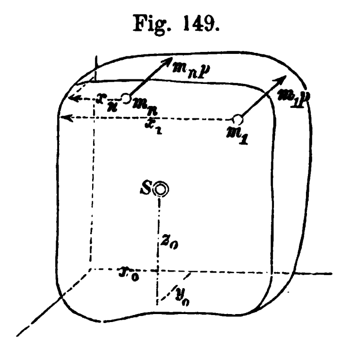
$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}.$$

$$\text{Ebenso } y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Der so gefundene Mittelpunkt S ist ganz unabhängig von der Beschleunigung p, d. h. von der Gröfse der Kräfte, er wird lediglich bedingt durch die Massen der einzelnen Teilchen und ihre Koordinaten, d. h. durch die Massenverteilung des Körpers. Der Mittelpunkt solcher Kräfte, die sich gleichmäfsig über die Masse eines Körpers verteilen, heifst deshalb der Massenmittelpunkt des Körpers.

Einen besonderen Fall solcher Kräfte bilden z. B. die Schwerkräfte. Bei solchen ist $p = g$ und die Richtung lotrecht abwärts. Der Massenmittelpunkt eines Körpers ist daher auch der Mittelpunkt der Schwerkräfte und heifst deshalb auch der Schwerpunkt. Wird der mit dem Achsenkreuze fest verbundene Körper gegen die Richtung des Lotes verdreht, so bleiben für jeden Massenpunkt die Werte m, x, y und z unverändert, die Richtungen der Kräfte aber bleiben lotrecht und verdrehen sich dabei gegen das Achsenkreuz. Diese Verdrehung hat aber auf den Schwerpunkt S keinen Einflufs.

Fig. 149.



Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Durchschnittspunkt der verschiedenen Richtungslinien des Gesamtgewichtes des Körpers bei verschiedenen Drehlagen desselben.

Nennt man die Gesamtmasse Σm des Körpers einfach M, so ist das Gesamtgewicht Mg, und dieses geht immer durch den Schwerpunkt S hindurch, wie auch der Körper bewegt werden mag.

Die Gleichungen für die Koordinaten des Schwerpunktes kann man auch schreiben:

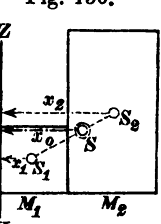
1) $$\Sigma m x = M x_0; \quad \Sigma m y = M y_0; \quad \Sigma m z = M z_0.$$

Der Ausdruck $\Sigma m x$ wird erhalten, indem man jedes Massenteilchen m mit seinem Abstande von der yz-Ebene multipliziert und diese Produkte zusammenzählt. Ein Produkt dieser Art, mx, heifst das statische Moment der Masse m in Bezug auf die yz-Ebene; Mx_0, bei dem man sich die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte vereinigt denkt, heifst das statische Moment der ganzen Masse. Dieselben Beziehungen, welche für die yz-Ebene gelten, sind auch für die anderen Koordinaten-Ebenen gültig, und weil die Koordinaten-Ebenen ganz willkürlich angenommen werden können, so gelten sie überhaupt für jede Ebene. Daher folgt der Satz:

Das statische Moment der ganzen Masse eines Körpers ist gleich der Momentensumme der einzelnen Teile in Bezug auf irgend eine Ebene.

Kann man die Masse eines Körpers in zwei Teile M_1 und M_2 zerlegen, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 schon bekannt sind, und sind deren Koordinaten x_1, y_1, z_1 bezw. x_2, y_2, z_2 (Fig. 150), so ist der Beitrag der Masse M_1 zur Momentensumme $\Sigma m x$ nach vorstehendem Satze $M_1 x_1$, derjenige der Masse M_2 aber $M_2 x_2$; daher wird

Fig. 150.



$$2) \qquad (M_1 + M_2) x_0 = M_1 x_1 + M_2 x_2 .$$

Stellt die Gerade YZ die zur Bildebene rechtwinklige yz-Ebene dar, so ergibt sich ferner leicht, dafs der Gesamtschwerpunkt S auf der Geraden $S_1 S_2$ liegen mufs. Denn denken wir uns die Richtung der Schwere rechtwinklig zur Zeichenebene, so bilden $M_1 g$ und $M_2 g$ zwei Parallelkräfte, deren Mittelkraft in ihrer Ebene (mit der Spur $S_1 S_2$) liegen mufs. Dreht sich die Richtung der Schwere, so drehen sich $M_1 g$ und $M_2 g$ um S_1 und S_2, ihre gemeinsame Ebene dreht sich um $S_1 S_2$, daher mufs S in $S_1 S_2$ liegen. Ist also der Körper in zwei Massenteile M_1 und M_2 zerlegt, so genügt schon die eine Gleichung für x_0 zur Bestimmung von S auf $S_1 S_2$. Da bei der Zusammensetzung zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes die Mittelkraft zwischen beiden liegt, und ihre Abstände von den beiden Kräften sich umgekehrt verhalten wie die Kräfte, so ist das Verhältnis dieser Abstände:

$$SS_1 : SS_2 = M_2 g : M_1 g = M_2 : M_1 .$$

Hiernach kann man S leicht finden, indem man (Fig. 151) durch S_1 und S_2 beliebige Parallelen zieht und auf ihnen die Gröfsen M_2 bezw. M_1 (d. h. die vertauschten Massen) als Längen nach entgegengesetzten Seiten aufträgt. Die Verbindungsgerade der Endpunkte schneidet dann $S_1 S_2$ in S.

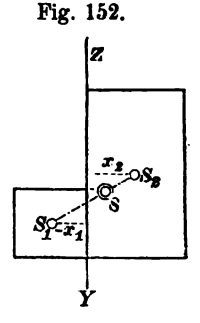
Fig. 151.

Legt man die yz-Ebene so, dafs die Teilschwerpunkte zu beiden Seiten der Ebene liegen (Fig. 152), so haben x_1 und x_2 verschiedene Vorzeichen, und es ist $M x_0 = M_2 x_2 - M_1 x_1 = \Sigma m x$. Ist die yz-Ebene dann noch so gelegt, dafs $M_1 x_1 = M_2 x_2$, so wird $M x_0 = \Sigma m x = 0$, mithin $x_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt

liegt in der xy-Ebene. Ebenso wird allgemein nach Gl. 1, wenn $\Sigma m x = 0$ ist, auch $x_0 = 0$; somit hat man den vielfach angewendeten Satz:

In Bezug auf eine den Schwerpunkt eines Körpers enthaltende Ebene ist die Momentensumme seiner Massenteile gleich Null, und umgekehrt.

Fig. 152.



Ein Körper, dessen Masse M sich gleichförmig über seinen Rauminhalt V *(Volumen)* verteilt, heifst homogen. Das Gewicht γ der Raumeinheit (des Kubikmeters) heifst (S. 55) die Dichte des Körpers; diese ist bei einem homogenen Körper überall gleich. Das Gewicht des ganzen Körpers ist $Mg = \gamma V$, das eines Raumteilchens dV ebenso $mg = \gamma \cdot dV$; mithin sind die Massen $M = V \cdot \gamma : g$ bezw. $m = dV \cdot \gamma : g$. In den Gleichungen für den Schwerpunkt heben sich dann die allen Gliedern gemeinsamen Faktoren $\gamma : g$ fort, und es bleibt

3) $$V x_0 = \int dV \cdot x,$$

indem statt des Zeichens Σ hier das gleichbedeutende $\int$-Zeichen gesetzt ist.

Eine Ebene, die einen homogenen Körper in zwei symmetrische Hälften teilt, enthält den Schwerpunkt, weil in Bezug auf sie $\int dV \cdot x = 0$ ist.

Schwerpunkte von Linien. Hat der homogene Körper die Gestalt eines dünnen Stabes von überall gleichem Querschnitt F, so ist, wenn die Länge des Stabes s, diejenige eines Teilchens ds, $V = Fs$, $dV = F \cdot ds$. Es hebt sich dann der gemeinsame Querschnitt F in allen Gliedern fort, und man hat für einen solchen Stab, den man materielle Linie nennt:

4) $$s x_0 = \int ds \cdot x;$$

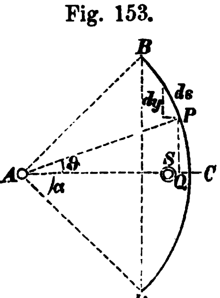
und für die anderen Richtungen entsprechend.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt selbstverständlich in der Mitte.

Bei einer gebrochenen Linie kennt man die Schwerpunkte S_1, S_2, ... der einzelnen Teile und deren Koordinaten. Es ist dann $(s_1 + s_2 + \ldots) x_0 = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots$.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens vom Halbmesser r und dem Zentriwinkel 2α liegt auf der Mittellinie (Fig. 153), zu suchen ist nur $AS = x_0$. Das Teilchen $ds = r \cdot d\vartheta$, bei P gelegen, hat von der durch A gelegten lotrechten yz-Ebene den Abstand $x = AQ = r\cos\vartheta$. Es ist $s = 2r\alpha$, und es gilt die Gleichung

Fig. 153.



$$2r\alpha x_0 = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\vartheta \cdot d\vartheta.$$

Denn zählt man den positiven Winkel ϑ nach oben, so entspricht dem unteren Endpunkte D der Winkel $\vartheta = -\alpha$. Jedoch sind die Beiträge der beiden Hälften des Bogens zur Momentensumme gleich grofs, so dafs man zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \alpha$ integrieren und das Ganze mit 2 multiplizieren kann. Weil aber $d\sin\vartheta = \cos\vartheta \cdot d\vartheta$, so ist $\int \cos\vartheta \cdot d\vartheta = \sin\vartheta$, also

$$2r\alpha x_0 = 2r^2 \Big[\sin\vartheta\Big]_0^\alpha = 2r^2 \sin\alpha, \text{ oder}$$

5)
$$x_0 = r \frac{\sin\alpha}{\alpha} = r \frac{2r\sin\alpha}{2r\alpha}.$$

Weil nun $2r\sin\alpha =$ der Sehne $\overline{BD}$, $2r\alpha =$ dem Bogen $\widehat{BD}$, so kann das Ergebnis auch geschrieben werden:

$$x_0 : r = \text{Sehne} : \text{Bogen}.$$

Für einen sehr kleinen Bogen ist die Sehne gleich dem Bogen, daher $x_0 = r$; für einen Halbkreisbogen aber $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\sin\alpha = 1$, mithin $x_0 = \frac{2}{\pi} r = 0{,}637\, r$ (annähernd $\frac{2}{3} r$).

Schwerpunkte von Flächen. Hat der homogene Körper die Gestalt einer ebenen oder gekrümmten Platte F von überallgleicher Dicke δ, so wird $V = \delta \cdot F$, $dV = \delta \cdot dF$, mithin

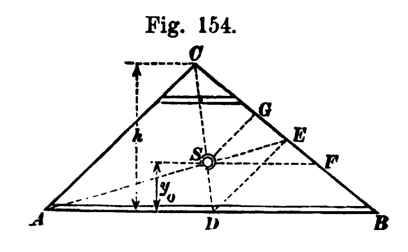
6)
$$F x_0 = \int dF \cdot x.$$

Eine solche Platte nennt man eine materielle Fläche.

Der Schwerpunkt der Fläche eines regelmäfsigen Vielecks liegt natürlich im Mittelpunkte.

Eine **Dreieckfläche** (Fig. 154) läßt sich in sehr viele Streifen, parallel zur Grundlinie AB, zerlegen. Weil deren Schwerpunkte sämtlich auf der Mittellinie CD liegen, so mufs diese auch den Schwerpunkt S der ganzen Fläche enthalten. Mit demselben Rechte gilt dieses von der Mittellinie AE. Folglich mufs der Schnittpunkt der Mittellinien der Schwerpunkt S sein.

Fig. 154.



Da das Dreieck nur einen Schwerpunkt haben kann, so liegt hierin nebenbei der Beweis des geometrischen Satzes, dafs die 3 Mittellinien eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Wegen der innigen Beziehungen zwischen Geometrie und Mechanik kommt es nicht selten vor, dafs Sätze der Mechanik in einfacher Weise zur Lösung geometrischer Aufgaben benutzt werden können.

Zieht man DE, so findet man leicht, dafs $DE \parallel AC$ und $DE = \frac{1}{2} AC$, daher in den ähnlichen Dreiecken SAC und SED:

$$SC : SD = AC : DE = 2 : 1,$$

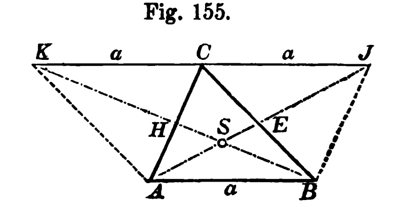
oder es liegt S im unteren Drittelpunkte der Mittellinie CD. Nennt man h das Höhenlot von C auf AB, y_0 das Lot von S, so wird offenbar

$$y_0 = \frac{1}{3} h. \tag{7}$$

Zieht man $SF \parallel AB$, so mufs auch $BF = \frac{1}{3} BC$ sein, und ebenso, wenn $SG \parallel AC$, auch $CG = \frac{1}{3} BC$. Man kann daher S auch bestimmen, indem man BC in 3 gleiche Teile zerlegt, durch den Teilpunkt F eine Parallele zur nächsten Seite AB, durch den Teilpunkt G eine Parallele zur nächsten Seite CA zieht. Beide schneiden sich dann in S.

Zwei Mittellinien des Dreiecks, z. B. AE und BH (Fig. 155) kann man auch ohne Hülfe eines Zirkels finden, indem man durch C eine Parallele zu AB zieht und auf dieser durch $BJ \parallel AC$ und $AK \parallel BC$ die Punkte J und K so bestimmt, dafs $CJ = CK = AB$ ist. Zieht man dann AJ, so sind AJ und BC die Diagonalen eines Parallelogramms $ABJC$ und halbieren sich gegenseitig im Punkt E; entsprechendes gilt von

Fig. 155.



BK und AC. Mithin sind AE und BH zwei Mittellinien des Dreiecks ABC.

Das Trapez läfst sich, wie das Dreieck, in lauter Streifen, parallel den Grundlinien a und b zerlegen, weshalb der Schwerpunkt auf der Mittellinie des Trapezes liegen mufs. Um seine Höhenlage zu finden, teile man das Trapez (Fig. 156) durch eine Diagonale in zwei Dreiecke

$$ACD = F_1,\ ABC = F_2.$$

Fig. 156.

Von $AB = a$ aus gemessen, sind dann die Höhenabstände der Teilschwerpunkte $y_1 = {}^2/_3 h$; $y_2 = {}^1/_3 h$. Nach der Gleichung

$$F y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

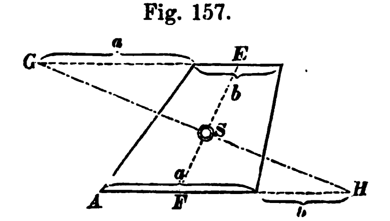
wird also

$$^1/_2 (a + b) h y_0 = {}^1/_2 b h \cdot {}^2/_3 h + {}^1/_2 a h \cdot {}^1/_3 h \quad \text{oder}$$

8) $$(a + b) y_0 = \frac{h}{3}(2b + a) \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b}.$$

Zur geometrischen Konstruktion (Fig. 157) verlängert man die Seite b um a, die Seite a nach der anderen Richtung um b. Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Verlängerungen schneidet dann die Mittellinie in S. Es ist nämlich in den ähnlichen Dreiecken SEG und SFH

Fig. 157.



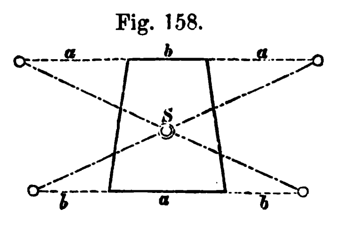
$$SF : SE = FH : EG = (b + {}^1/_2 a) : (a + {}^1/_2 b) = (a + 2b) : (2a + b),$$

ferner $SF : EF = SF : (SE + SF)$ oder

$$SF : EF = (a + 2b) : (a + 2b + 2a + b) = (2b + a) : 3(a + b).$$

Dies stimmt mit dem Verhältnis $y_0 : h$ überein, mithin ist die Konstruktion richtig. Trägt man aber die Verlängerung a nach rechts, die Verlängerung b nach links auf (Fig. 158), so mufs das Ergebnis das gleiche sein. Man braucht daher die Mittellinie gar nicht, sondern verlängert b nach beiden Seiten um a, a nach beiden

Fig. 158.



Seiten um b, verbindet die Endpunkte der Verlängerungen kreuzweise, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in S.

Obige sehr einfache Konstruktion beansprucht viel seitlichen Raum. Sollen die Konstruktionslinien ganz innerhalb des Trapezes bleiben, so kann man folgende Eigenschaft des Schwerpunktes S benutzen: Nach obigem liegt S auf der Halbierungslinie, u. zw. ist $SF:EF = (2b+a):3(a+b)$. Man ziehe (Fig. 159) die Diagonale AC und dazu durch S eine Parallele SH. Zieht man dann noch $CG \parallel EF$, so ist $\Delta\, HSF \sim ACG$. Mithin $HF:AG = SF:CG$ und wegen $CG = EF$:

Fig. 159.

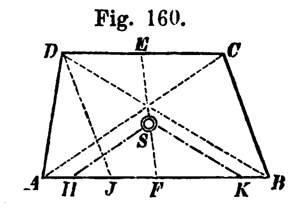
$$\frac{HF}{AG} = \frac{SF}{EF} = \frac{2b+a}{3(a+b)}.$$

Weil aber $AG = {}^1\!/_2(a+b)$, so wird

$$HF = \frac{2b+a}{3(a+b)}\,\frac{a+b}{2} = \frac{2b+a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{2} - \frac{a-b}{3}.$$

Da nun $AF = {}^1\!/_2 a$, so mufs $AH = {}^1\!/_3(a-b)$ sein. Man ziehe also (Fig. 160) $DJ \parallel CB$, so dafs $AJ = a - b$, teile dieses in 3 gleiche Teile, dann ist $AH = {}^1\!/_3(a-b)$. Nun zieht man durch H eine Parallele zur Diagonale AC, so schneidet diese Parallele die Mittellinie EF in S. Macht man $BK = AH = {}^1\!/_3(a-b)$, so mufs eine durch K gezogene Parallele zur anderen Diagonale BD aus demselben Grunde durch S gehen. Zieht man also diese Parallele KS durch K, so kann man die Mittellinie entbehren.

Fig. 160.



Dieses Verfahren rührt von Prof. G. Lang (Rigaische Industrie-Ztg. 1883, S. 126) und Prof. Rob. Land (Zentralblatt der Bauverwaltung 1894, S. 458) her. Vergl. auch Zeitschrift des Hannov. Arch.- und Ing.-Vereins 1895, S. 115—117.

Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks. Man teilt das Viereck (Fig. 161) durch die Diagonale BD in 2 Dreiecke, halbiert die Diagonale in M, zieht AM und CM, so liegen auf diesen die Teilschwerpunkte S_1 und S_2 mit $MS_1 = {}^1\!/_3 MA$; $MS_2 = {}^1\!/_3 MC$.

Aus diesen Verhältnissen folgt, dafs $S_1 S_2 \parallel AC$ sein mufs. Teilt man das Viereck ein zweites Mal durch die Diagonale AC, so ergeben sich die Teilschwerpunkte S_3 und S_4, u. zw. mufs die Verbindungsgerade $S_3 S_4 \parallel BD$ sein, gerade so wie $S_1 S_2 \parallel AC$ war. Der Gesamtschwerpunkt S des Vierecks mufs nun im Schnitte von $S_1 S_2$ mit $S_3 S_4$ liegen. Zieht man nun durch D und C Parallelen zu AC bezw. BD, und schneiden sich diese in F, so mufs die Verbindungsgerade EF durch S gehen, und es mufs $ES = {}^1/_3 EF$ sein, da $ES_1 = {}^1/_3 ED$, $ES_4 = {}^1/_3 EC$, $S_1 S \parallel DF$, $S_4 S \parallel CF$. Denkt man sich aber AF und BF gezogen, so würde der Schwerpunkt eines Dreiecks ABF im unteren Drittelspunkte von EF liegen, d. h. mit S zusammenfallen. Hiernach ist der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ gleichbedeutend mit demjenigen des Dreiecks ABF. Um ihn zu finden, ist es in diesem Falle wohl am einfachsten, die Seite AB in drei gleiche Stücke zu teilen (Fig. 162), $DF \parallel AC$, $CF \parallel BD$, $GS \parallel AF$, $HS \parallel BF$ zu ziehen.

Fig. 161.

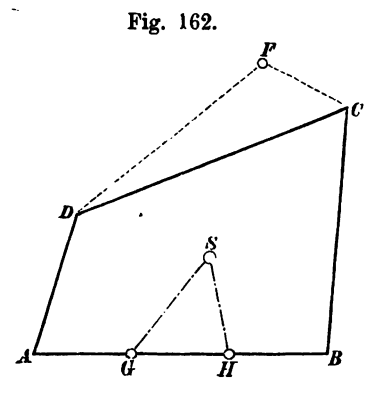


Fig. 162.

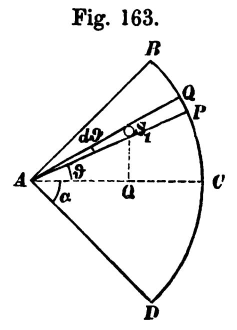
Die Teilschwerpunkte S_1 bis S_4 in Fig. 161 haben also nur zur Herleitung des Verfahrens gedient, sind aber für die Ausführung unnötig.

Dies Verfahren rührt von Prof. Rob. Land (Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1895, S. 451) her und kann auch für Trapeze angewendet werden, da es ebenso einfach ist, wie die in Fig. 159 und 160 (S. 151) angegebenen Verfahren.

Die Dreiteilung von AB in Fig. 162 läfst sich auch entbehren, wenn man den Schwerpunkt S des Dreiecks ABF nach Fig. 155 bestimmt.

Schwerpunkt des Kreisausschnittes. Schliefst der beliebige Halbmesser AP (Fig. 163) mit der Mittellinie AC den Winkel ϑ ein und ist PQA ein unendlich kleiner Ausschnitt vom Zentriwinkel $d\vartheta$, so ist dessen Fläche $dF = \frac{1}{2} r \cdot r d\vartheta$; der Teilschwerpunkt S_1 liegt um $\frac{2}{3} r$ von A entfernt und hat die Abscisse $AQ = \frac{2}{3} r \cos \vartheta$. In Gleichung 6, S. 148 bedeutet dF freilich ein nach zwei Richtungen unendlich kleines Flächenteilchen, doch kann man als Beitrag des Sektors PQA zu dem statischen Momente schreiben $PQA \cdot AQ$. Dann ist

Fig. 163.



$$Fx_0 = \frac{2r^3}{3}\int_0^\alpha \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$$

und, weil $F = 2 \frac{r^2 \alpha}{2} = r^2 \alpha$,

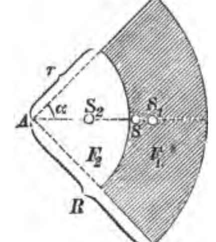
$$x_0 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \tag{9}$$

Für sehr kleines α ist $x_0 = \frac{2}{3} r$, für die Halbkreisfläche mit $\alpha = \frac{1}{2}\pi$:

$$x_0 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0{,}424\, r \text{ (rund } \tfrac{2}{5} r\text{)}. \tag{10}$$

Schwerpunkt des Ringausschnittes. Der Ringausschnitt ist als Unterschied zweier Kreisausschnitte der Halbmesser R und r anzusehen. Ist S der Schwerpunkt des grofsen Ausschnittes von der Fläche F, so ist $AS = x_0$; S_2 sei der Schwerpunkt des kleinen Ausschnittes von der Fläche F_2 mit $AS_2 = x_2$; F_1 sei der Ringausschnitt mit $AS_1 = x_1$. Dann wird

Fig. 164.



$$Fx_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2, \text{ u. zw.}$$

$$F = R^2 \alpha;\; F_2 = r^2 \alpha;\; F_1 = (R^2 - r^2)\alpha.$$

$$x_0 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha};\; x_2 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \text{ und}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\frac{R^2 R \sin \alpha - r^2 r \sin \alpha}{(R^2 - r^2)\alpha} = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\frac{\sin \alpha}{\alpha}. \tag{11}$$

Schwerpunkt der Kreisabschnittfläche. Der Abschnitt F_1 bildet mit dem Dreieck $ABD = F_2$ den Ausschnitt $ABCD = F$. Die entsprechenden Schwerpunkts-Abscissen seien $AS_1 = x_1$, $AS_2 = x_2$; $AS = x_0$. Dann ist

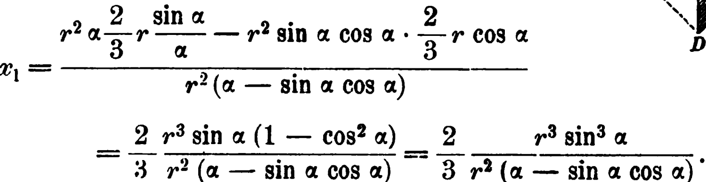
Fig. 165.

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2,$$

u. zw. $F = r^2 \alpha$; $F_2 = r^2 \sin\alpha \cos\alpha$;

$$F_1 = r^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha);$$

$$x_0 = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}; \quad x_2 = \frac{2}{3} r \cos\alpha \text{ und}$$



$$x_1 = \frac{r^2 \alpha \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha} - r^2 \sin\alpha \cos\alpha \cdot \frac{2}{3} r \cos\alpha}{r^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin\alpha (1 - \cos^2\alpha)}{r^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3\alpha}{r^2 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)}.$$

Es ist aber die Sehne $BD = l = 2r \sin\alpha$, also $r \sin\alpha = \frac{1}{2} l$ mithin $x_1 = \frac{2}{3} \frac{l^3}{8 F_1} = \frac{l^3}{12 F_1}$, wenn F_1 die Fläche des Abschnittes.

Man kann auch schreiben

$$x_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}. \tag{12}$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ wird der Abschnitt wieder zur Halbkreisfläche und $x_1 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$, wie vom Ausschnitte aus abgeleitet.

Schwerpunkt der halben Parabelfläche. Die Parabel AC (Fig. 166) habe die Gleichung $y^2 = 2px$. Für die Koordinaten des Endpunktes C wird dann $b^2 = 2pa$, und durch Division entsteht

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

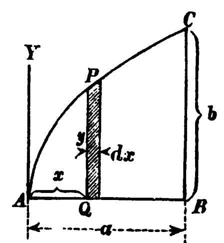


Fig. 166.

Die unendlich kleinen Teilchen des Streifens $PQ = y \cdot dx$ haben gemeinsamen Abstand x

von der AY, können daher zu dem Beitrage $y \cdot dx \cdot x$ zusammengefafst werden. Die Fläche $ABC = F$ ist

$$\int_0^a y \cdot dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{1/2} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} a^{3/2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} a b,$$

d. h. $^2/_3$ von der Fläche des umschriebenen Rechtecks ab. Hiernach wird

$$\frac{2}{3} a b x_0 = \int_0^a y \cdot dx \cdot x = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{3/2} dx$$

$$= \frac{2}{5} \frac{b}{\sqrt{a}} a^{5/2} = \frac{2}{5} b a^2$$

13) also $x_0 = {}^3/_5\, a$, unabhängig von b.

Zur Auffindung der Ordinate y_0 des Schwerpunktes trenne man einen Streifen ab, dessen Teilchen den gleichen Abstand y von AB haben (Fig. 167). Dann wird

$$\frac{2}{3} a b y_0 = \int_0^b (a - x)\, dy \cdot y;$$

dies wird wegen $x : a = y^2 : b^2$:

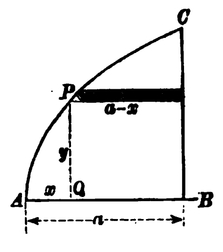


Fig. 167.

$$\frac{2}{3} a b y_0 = \frac{a}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2)\, y \cdot dy$$

$$= \frac{a}{b^2} \left\{ b^2 \int_0^b y \cdot dy - \int_0^b y^3\, dy \right\}$$

$$= \frac{a}{b^2} \left\{ \frac{b^4}{2} - \frac{b^4}{4} \right\} = \frac{a b^2}{4}, \text{ mithin}$$

14) $$y_0 = \frac{3}{8} b.$$

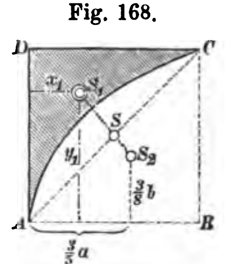
Man hätte auch als Beitrag des Streifens $y \cdot dx$ (Fig. 166) zum statischen Moment in Bezug auf AB die Fläche des Streifens mit der Schwerpunktshöhe $^1/_2\, y$ multipliziert einführen können, dann wäre

$$\frac{2}{3} a b y_0 = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \int_0^a x \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \frac{a^2}{2} = \frac{a b^2}{4}$$

entstanden.

Die Koordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunktes S_1 der Ergänzungsfigur, welche die Parabelfläche zum Rechteck $ABCD$ ergänzt (Fig. 168), findet man leicht, weil das Rechteck die Schwerpunkts-Koordinaten $x_0 = {}^1/_2 a$; $y_0 = {}^1/_2 b$ hat:

Fig. 168.



$$x_1 \cdot {}^1/_3 ab + {}^3/_5 a \cdot {}^2/_3 ab = {}^1/_2 a \cdot ab$$

15) $$x_1 = {}^3/_{10} a.$$

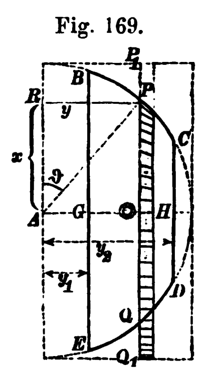
$$y_1 \cdot {}^1/_3 ab + {}^3/_8 b \cdot {}^2/_3 ab = {}^1/_2 b \cdot ab$$

16) $$y_1 = {}^3/_4 b.$$

S_1, S und S_2 liegen auf einer Geraden, und es ist $SS_1 = 2 \cdot SS_2$.

Schwerpunkt einer Kugelzonen-Oberfläche. Der unendlich kleine Teil der Oberfläche bei PQ (Fig. 169), entsprechend einem Bogenteilchen ds des äufseren Kreises, hat die Gröfse $dF = ds \cdot 2\pi x$. Nun bildet ds mit dy denselben Winkel ϑ wie $AP = r$ mit $AR = x$. Daraus folgt $ds = dy : \cos\vartheta = dy \cdot r : x$ und $dF = 2 r\pi dy$, gleich einer Zylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe dy. Diese Zylinderfläche bei $P_1 Q_1$ hat dann dasselbe statische Moment wie die Kugelzonenfläche. Daher mufs auch die ganze Zonenfläche $BCDE$ gleiche Fläche, gleiches Moment und gleiche Schwerpunktslage haben mit dem entsprechenden Teile der die Kugel umschliefsenden Zylinderfläche. Da der Schwerpunkt der Zylinderfläche in der Mitte der Mittellinie liegt, so liegt auch derjenige der Kugelzone in der Mitte von GH. Die Rechnung führt zu gleichem Ergebnisse:

Fig. 169.



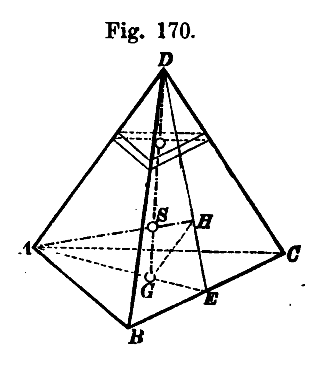
$$2 r\pi (y_2 - y_1) y_0 = 2 r\pi \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dy = r\pi (y_2^2 - y_1^2);$$

17) $$y_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Gleiches gilt von der Oberfläche der Kugelhaube.

Schwerpunkt des Körpers der dreiseitigen Pyramide. Durch Schnitte, parallel mit der Grundfläche ABC (Fig. 170) läfst sich die Pyramide in dreieckige Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte durchweg auf der Verbindungsgeraden zwischen der Spitze D und dem Schwerpunkte G der Grundfläche liegen. Die Linie DG enthält daher den Gesamtschwerpunkt S. Der Punkt G wird erhalten, indem man BC in E halbiert, AE zieht und $EG = \frac{1}{3} EA$ macht. Betrachtet man in gleicher Weise BCD als Grundfläche, zieht DE mit $EH = \frac{1}{3} DE$, so mufs der Schwerpunkt auch auf AH liegen. DG und AH schneiden sich in S. Weil $EG = \frac{1}{3} EA$, $EH = \frac{1}{3} ED$, ist $GH \parallel AD$ und $= \frac{1}{3} AD$. Daher ist $SGH \sim SDA$. $SG = \frac{1}{3} SD = \frac{1}{4} GD$. Teilt man also die Gerade von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche in 4 gleiche Teile, so ist der der Grundfläche zunächst liegende Teilpunkt der Schwerpunkt S. In demselben Verhältnis $1:4$ wie $SG:GD$ stehen auch die Höhenlote y_0 und h, von dem Schwerpunkte S und der Spitze D auf die Grundfläche gefällt;

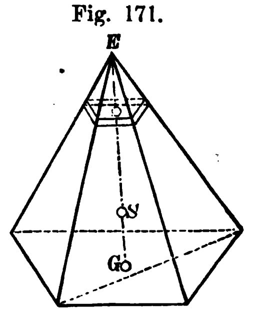
Fig. 170.



18) $$y_0 = \frac{1}{4} h.$$

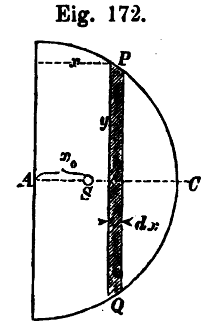
Eine vierseitige Pyramide (Fig. 171) läfst sich in lauter ähnliche und ähnlich liegende Scheiben zerlegen. Daher mufs der Gesamtschwerpunkt S wieder liegen auf der Geraden von der Spitze E nach dem Schwerpunkte G der Grundfläche. Zerlegt man die Pyramide in zwei dreiseitige mit der gemeinsamen Spitze E und der Höhe h, so liegt der Schwerpunkt jeder in der Höhe $y_0 = \frac{1}{4} h$ über der Grundfläche, daher auch der Gesamtschwerpunkt S in dieser Höhe $y_0 = \frac{1}{4} h$. Es ist also $GS = \frac{1}{4} GE$. Offenbar gilt dies auch für die Körper vielseitiger Pyramiden und Kegel: der Schwerpunkt liegt im unteren Viertelpunkte der Geraden vom Schwerpunkte der Grundfläche nach der Spitze.

Fig. 171.



Schwerpunkt des Halbkugelkörpers. Schneidet man eine zylindrische Scheibe PQ (Fig. 172) vom Halbmesser y im Abstand x vom Mittelpunkt A heraus, so haben deren Teilchen durchweg den gleichen Abstand x von der durch A gelegten yz-Ebene. Man kann daher den Inhalt der Scheibe zu $dV = y^2\pi \cdot dx$ zusammenfassen mit dem Momente $dV \cdot x = y^2\pi \cdot dx \cdot x$, und hat:

Eig. 172.



$$^2/_3 r^3 \pi x_0 = \pi \int_0^r y^2 x \cdot dx.$$

Um unter dem Integralzeichen eine Differential-Funktion von x zu erhalten, mufs man $y^2 = r^2 - x^2$ setzen. Dann wird

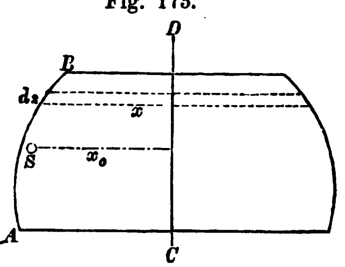
$$^2/_3 r^3 \pi x_0 = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, x \cdot dx = r^2\pi \int_0^r x \cdot dx - \pi \int_0^r x^3 dx$$

$$= {}^1/_2 r^4 \pi - {}^1/_4 r^4 \pi = {}^1/_4 r^4 \pi, \text{ also}$$

19) $$x_0 = {}^3/_8 r.$$

Satz von Pappus und Guldin. Die Lehre vom Schwerpunkte war schon Archimedes (287—212 v. Chr.) bekannt. Der alexandrinische Gelehrte Pappus benutzte gegen Ende des dritten oder vierten Jahrhunderts n. Chr. die Schwerpunkte ebener Kurven und Flächen zur Berechnung von Umdrehungsflächen und -Körpern. Der betreffende Satz wurde vom Jesuitenpater Guldin aus St. Gallen 1635 n. Chr. weiter verwertet und heifst danach der Satz von Pappus und Guldin.

Fig. 173.



1) Dreht sich eine ebene Kurve AB (Fig. 173) um eine in ihrer Ebene liegende Achse CD, so entsteht eine Umdrehungsfläche. Ein Bogenteilchen ds mit dem Drehungshalbmesser x erzeugt eine Fläche $dF = ds \cdot 2\pi x$. Der Inhalt der ganzen erzeugten Umdrehungsfläche ist daher

$$F = 2\pi \int ds \cdot x.$$

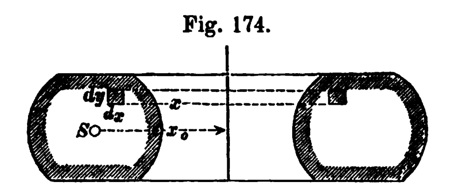
Weil nun nach der Lehre vom Schwerpunkte (S. 147, Gl. 4) $\int ds \cdot x = s x_0$, so wird

20) $$F = 2\pi x_0 s.$$

Darin bedeutet x_0 den Drehungshalbmesser der Schwerpunktes S der erzeugenden Kurve von der Länge $AB = s$.

2) Dreht sich aber eine ebene Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse (Fig. 174), so erzeugt ein Flächenteilchen $dF = dx \cdot dy$ mit dem Halbmesser x einen Kreisring vom Inhalte

Fig. 174.



$$dV = \left\{ (x + dx)^2 - x^2 \right\} \pi \cdot dy = d(x^2)\pi \cdot dy$$
$$= 2x \cdot dx \cdot \pi \cdot dy = 2\pi x \cdot dx \cdot dy = 2\pi x \cdot dF.$$

Der ganze Umdrehungskörper wird sonach $V = 2\pi \int dF \cdot x$, oder, weil (S. 148, Gl. 6) $\int dF \cdot x = F x_0$,

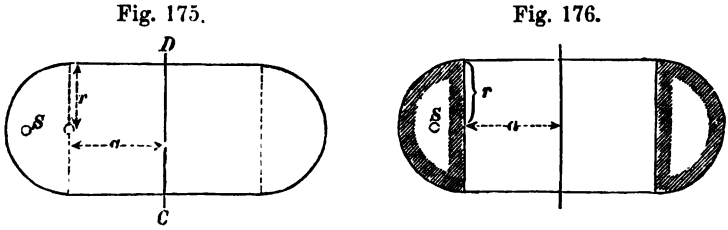
21) $$V = F\, 2\pi x_0,$$

daher der Pappus-Guldin'sche Satz:

Der Inhalt einer Fläche, welche durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse entsteht, ist gleich der Länge der Kurve mal dem Drehungswege $2\pi x_0$ ihres Schwerpunktes. — Der Inhalt eines Körpers, welcher durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse entsteht, ist gleich der Fläche mal dem Drehungswege ihres Schwerpunktes.

Beispiel 1: Dreht sich nach Fig. 175 ein Halbkreisbogen um die Achse CD, so ist nach S. 148

Fig. 175. Fig. 176.



$$x_0 = a + 2\frac{r}{\pi}, \quad \text{mithin } F = r\pi\left(a + 2\frac{r}{\pi}\right)2\pi = 2ra\pi^2 + 4r^2\pi.$$

Der letzte Summand ist die Kugeloberfläche, welche für $a = 0$ entsteht.

Durch Drehung der Halbkreis fläche entsteht ein Körper (Fig. 176)

$$V = \frac{1}{2} r^2 \pi 2 \pi \left(a + \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \right) = r^2 \pi^2 a + \frac{4}{3} r^3 \pi .$$

Der letzte Summand bezeichnet den Inhalt des Kugelkörpers, welcher für $a = 0$ entsteht.

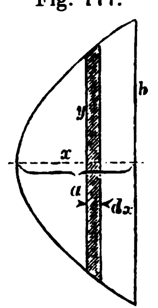


Fig. 177.

Beispiel 2: Der Inhalt eines Umdrehungs-Paraboloides (Fig. 177) ist leicht zu finden zu

$$V = \int y^2 \pi \, dx = \pi \frac{b^2}{a} \int_0^a x \, dx = \frac{\pi b^2 a}{2},$$

gleich der Hälfte des umschliefsenden Zylinders. Daraus läfst sich nun die Schwerpunkts-Ordinate y_0 der halben Parabelfläche berechnen:

$$\tfrac{1}{2} b^2 a \pi = \tfrac{2}{3} a b \, 2 \pi y_0 ,$$

mithin $y_0 = \tfrac{3}{8} b$, wie auf S. 155 gefunden.

15. Zeichnerische Ermittelung des Schwerpunktes einer ebenen Fläche.

Man zerlegt die gegebene Fläche in Teile, deren Inhalte und Schwerpunkte sich leicht bestimmen lassen, denkt sich in den einzelnen Schwerpunkten angreifend die Einzelflächen als parallele Kräfte, einmal in einer, sodann in einer anderen (etwa zur ersten senkrechten) Richtung wirkend und bestimmt vermittelst je eines Kraft- und Seilecks für beide Kraftrichtungen die Richtungslinien der Mittelkraft. Beide müssen den Schwerpunkt der Gesamtfläche enthalten, der damit gefunden ist.

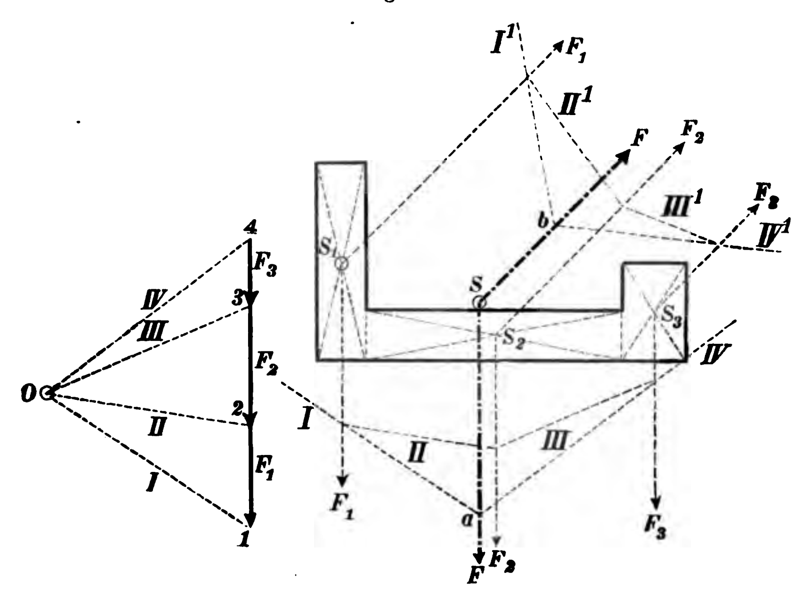
Fig. 178.

In Fig. 178 und 179 ist die in der beschriebenen Weise erfolgte Ermittelung des Schwerpunktes je einer aus einzelnen Rechtecken bestehenden Fläche (etwa Profilflächen eiserner

Träger) dargestellt. Die Schwerpunkte der Einzelflächen werden in den Schnittpunkten der Diagonalen erhalten.

In Fig. 178 sind die als Kräfte gedachten Einzelflächen F_1, F_2 und F_3 in den Teilschwerpunkten einmal senkrecht und einmal wagerecht angenommen. In Fig. 179 dagegen sind wegen des

Fig. 179.



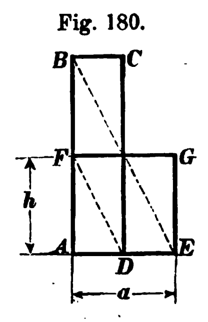
geringen senkrechten Abstandes der Teilschwerpunkte S_2 und S_3, um eine klarere Figur zu erhalten, die Kräfte F_1, F_2 und F_3 einmal senkrecht und einmal in zweckentsprechender Neigung angenommen. In beiden Fällen ist die Zeichnung eines Kraftecks nur für die senkrechte Richtung der Kräfte F_1, F_2 und F_3 erforderlich, wenn man die der zweiten wagerechten oder geneigten Kraftrichtung entsprechenden Seilecksseiten unter gleichem Winkel gegen die Polstrahlen richtet, wie ihn die beiden Kraftrichtungen miteinander einschliefsen, etwa 90^0 oder 45^0.

In den Kraftecken erscheinen die Flächen als Kräfte durch gerade Linien ausgedrückt. Man hat sich daher bei Darstellung derselben zunächst über einen entsprechenden Mafsstab zu entscheiden, indem man festsetzt, wieviel Flächeneinheiten durch eine Längeneinheit ausgedrückt werden sollen. Drückt man beispielsweise

5 Flächeneinheiten durch eine Längeneinheit aus, so würde ein Rechteck vom 10 cm Länge und 2 cm Breite durch eine Linie von $\frac{10 \cdot 2}{5} = 4$ cm Länge darzustellen sein, d. h. alle Flächen sind in Rechtecke von derselben Grundlinie 5 cm zu verwandeln und als Kräfte durch die entsprechenden Höhen darzustellen. Bei der zeichnerischen Behandlung kann man ohne Rücksicht auf bestimmte Einheiten für alle Einzelflächen, als Rechtecke gedacht, eine Grundlinie von beliebiger Länge a annehmen und nach Mafsgabe der Fig. 180 die entsprechende Höhe durch Zeichnung ermitteln. Ist $ABCD$ die gegebene Teilfläche, $AE = a$ die gewählte Grundlinie, so ist, wenn man E mit B verbindet und durch D $DF \parallel EB$ zieht, AF die die Fläche darstellende Höhe h, denn es ist $AD : AE = AF : AB$ und daher

$$AD \cdot AB = AE \cdot AF = a \cdot h.$$

Fig. 180.



Ist die Fläche, von welcher der Schwerpunkt zu bestimmen ist, krummlinig begrenzt, so hat man sie in Streifen von so geringer Breite zu zerlegen, dafs diese mit genügender Genauigkeit als Rechtecke angesehen werden können.

16. Arbeit der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe.

Der Schwerpunkt wurde im vorhergehenden als der Mittelpunkt der Schwerkräfte eines starren Körpers oder sonstiger, über die Masse eines starren Körpers gleichmäfsig verteilter Massenkräfte gleichen Sinnes bezeichnet. Aber auch für Körper veränderlicher Form, ja selbst für beliebige Gruppen von Massen (mit oder ohne gegenseitige Verbindung) nennt man den irgend einer gegenseitigen Lage der Massenteilchen entsprechenden Punkt mit der Eigenschaft:

$$x_0 = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

Sind $m_1, m_2, \ldots m_n$ (Fig. 181) einzelne Massenpunkte oder einzelne starre Körper, die zusammen einen starren, oder einen der

Form nach veränderlichen Körper, oder eine beliebige Massengruppe bilden, und wirkt auf diese die Schwere in der Richtung der z-Achse, so verrichtet die Schwere bei einer unendlich kleinen Verrückung, bei der sich ein Massenteil m so bewegt, daſs z um dz zunimmt, eine Arbeit $mg \cdot dz$. Die Arbeitssumme der Schwerkräfte an allen Massenteilchen ist dann

Fig. 181.

$$d\mathfrak{A} = g(m_1 dz_1 + m_2 dz_2 + \ldots + m dz) = g \Sigma m \cdot dz.$$

Nun ist aber $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + mz = \Sigma mz = z_0 \Sigma m$, also, weil bei einer Verrückung die Massen m unveränderlich, die z-Werte aber veränderlich, $\Sigma m \cdot dz = dz_0 \Sigma m$; mithin ist

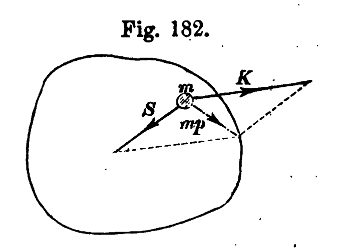
$$d\mathfrak{A} = g \cdot dz_0 \Sigma m = dz_0 \Sigma mg. \tag{22}$$

Die Arbeitsumme der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe berechnet sich gerade so, als ob die ganze Masse Σm der Gruppe in ihrem Schwerpunkte zu einem Massenpunkte vereinigt wäre.

17. Der Satz d'Alembert's.

Greift an einem Punkt m einer Massengruppe (Fig. 182) eine äuſsere Kraft K an, so würde der Punkt, wenn er frei wäre, im Sinne von K eine Beschleunigung $K:m$ erfahren. Die übrigen Punkte der veränderlichen oder unveränderlichen Massengruppe werden aber ebenfalls auf die Bewegung von m einwirken, also Kräfte, die sog. inneren Kräfte, auf m ausüben, deren Mittelkraft S sein möge. Durch S ist der Einfluſs der übrigen Punkte völlig ausgedrückt; nach Anbringung dieser Kraft verhält sich also der Punkt m wie ein freier. Nennt man daher p die wirkliche Beschleunigung des Punktes m, so muſs die dazu erforderliche Kraft mp die Mittelkraft aus K und S darstellen, oder man kann schreiben

Fig. 182.



$$mp \equiv K, S.$$

Ist aber mp die Mittelkraft von K und S, so würde das Entgegengesetzte von mp, die Kräfte K und S aufheben, was man

schreiben kann: $K, S, -mp \equiv 0$. Diese Kraft $-mp$, die dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p des Punktes m entspricht, nennen wir seine Ergänzungskraft, ebenso wie es bei der Betrachtung der scheinbaren Bewegung bezw. Ruhe eines Punktes (S. 84 u. 88) geschah. (Es ist ja auch ein Massenpunkt in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen Raum, der sich mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes verschiebt.)

Dies Tilgen der Kräfte K, S und $-mp$ findet an jedem Massenpunkte statt; daraus folgt dann auch ein gegenseitiges Aufheben der Gesamtheit der entsprechenden Kräftegruppen an der ganzen Massengruppe, d. h.:

Die Gruppe der sämtlichen Ergänzungskräfte $[-mp]$ (mit der eckigen Klammer als Gruppenzeichen) hebt die beiden Gruppen der äufseren Kräfte $[K]$ und der inneren Kräfte $[S]$ auf.

Die auf S. 96—162 entwickelten Lehren über die Gleichwertigkeit und Zusammensetzung der Kräfte gelten einstweilen nur für Kräfte an starren Körpern. Wenn aber an einer veränderlichen Massengruppe jeder Massenpunkt der Einwirkung von drei Kräften unterworfen wird, die sich aufheben oder im Gleichgewichte halten, so wird in diesem Gleichgewichtszustande der Kräfte jedes Punktes auch dadurch nichts geändert werden, dafs man die Punkte in starre Verbindung bringt. Wenn man also die drei Kräftegruppen $[-mp]$, $[K]$, $[S]$ nach den Lehren über die Zusammensetzung der Kräfte an starren Körpern zu einer Mittelkraft R und einem Achsenmoment $\mathfrak{M}$ vereinigt, so müssen R und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig Null werden. Die inneren Spannkräfte S wirken aber zwischen je zwei Punkten nach dem Gesetze der Wechselwirkung gleich und entgegengesetzt und heben sich daher bei der Zusammensetzung aller Kräfte zu je zweien auf, so dafs die Gruppe der inneren Kräfte $[S]$ überhaupt verschwindet. Daraus folgt der Satz, welchen d'Alembert (1717—1783) im Jahre 1743 in etwas anderer Fassung aufgestellt hat:

An einem starren Körper oder auch an einer veränderlichen Massengruppe heben die gesamten Ergänzungskräfte $[-mp]$ die Gruppe der äufseren Kräfte $[K]$ auf, wenn die Zusammensetzung der Kräfte wie an einem starren Körper erfolgt.

Mit Hülfe dieses Satzes läfst sich leicht die Frage beantworten, unter welcher Bedingung ein starrer Körper eine rein fort-

schreitende Bewegung, sog. Verschiebung ausführen kann. Bei einer Verschiebung haben alle Punkte des Körpers in einem Augenblicke gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung; nennt man die gemeinsame Beschleunigung p, so bilden die Ergänzungskräfte $[-mp]$ eine Kräftegruppe, die sich gleichmäfsig über die Masse des Körpers verteilt. Die Kräfte haben eine durch den Schwerpunkt gehende Mittelkraft $-Mp$, und diese mufs von den äufseren Kräften aufgehoben werden. Erkennt man also, dafs ein Körper eine reine Verschiebung erfährt, so kann man daraus schliefsen, dafs die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden äufseren Kräfte durch den Schwerpunkt gehen und von der Gröfse $+Mp$ sein mufs. Umgekehrt genügt aber das Wirken dieser Kraft noch nicht zur Erzeugung einer Verschiebung, sondern es ist dazu noch erforderlich, dafs der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte.

18. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Die Ergänzungskraft $-mp$ hat nach der x-Richtung eine Seitenkraft $-mp_x$, die Seitenkraft einer äufseren Kraft K in der x-Richtung sei $K\cos\alpha$, dann mufs nach d'Alembert's Satze sein:

$$\Sigma K\cos\alpha - \Sigma m p_x = 0,$$

oder, wenn man $\Sigma K\cos\alpha = X$ setzt,

$$\Sigma m p_x = X.$$

Bezieht man nun die Punkte des Körpers auf ein festes Achsenkreuz, so ist $dx:dt$ die Geschwindigkeit, $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung in der x-Richtung (S. 28), also

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = X. \tag{1}$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkt ist $\Sigma mx = Mx_0$ und, weil x und x_0 mit der Zeit t veränderlich sind,

$$\Sigma m\frac{dx}{dt} = M\frac{dx_0}{dt}, \tag{2}$$

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = M\frac{d^2x_0}{dt^2};\ \text{mithin wird (Gl. 1)}$$

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = X. \tag{3}$$

Darin bedeutet $\frac{d^2 x_0}{d t^2}$ die Seitenbeschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung der x-Achse. Dieselbe Beziehung gilt aber auch für einen einfachen Massenpunkt von der Masse M, der sich unter Einwirkung der äufseren Kräfte K bewegt, und zwar gilt dies für jede Achsenrichtung.

Also: Der Schwerpunkt eines Körpers oder einer beliebigen Massengruppe bewegt sich genau so, als ob die ganze Masse des Körpers oder der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämtliche äufsere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte haben hiernach auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einflufs.

Durch diesen Satz bekommt die Mechanik des Massenpunktes eigentlich erst ihr grofses Anwendungsgebiet. Da es einen einzelnen Massenpunkt von verschwindend kleinen Abmessungen in aller Strenge nicht gibt, so konnte es bisher scheinen, als ob die Lehren von der Bewegung des Massenpunktes für die Anwendung ziemlich wertlos seien. Aus vorstehendem Satz aber erkennt man, dafs die Lehre von der Bewegung des Massenpunktes auch für Körper ihre Bedeutung hat, insofern sie die Bewegung des Schwerpunktes richtig darstellt. Eine aufserdem etwa noch vorkommende Drehung um den Schwerpunkt kann dann noch besonders untersucht werden und bildet eine Ergänzung oder Vervollständigung der ganzen Aufgabe, nicht aber eine Berichtigung. In vielen Fällen kann man auch auf diese (häufig schwierige) Ergänzung der Lösung verzichten und sich mit der Kenntnis der Bewegung des Schwerpunktes begnügen.

Ein Kräftepaar wird bei der Verschiebung der Kräfte an den Schwerpunkt zwei Kräfte liefern, die sich aufheben. Kräftepaare haben hiernach keine Einwirkung auf die Bewegung des Schwerpunktes, sondern beeinflussen nur die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt.

19. Satz der Arbeit.

Auf einen Massenpunkt eines Körpers wirkt aufser der äufseren Kraft K eine innere Kraft S. Diese verrichten bei einer Bewegung des Körpers die Arbeiten $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{A}_i$. Sind c und v Anfangs- und

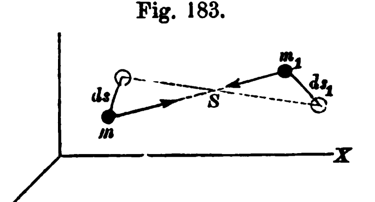
Endgeschwindigkeit des Punktes, so gilt für den Massenpunkt $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = \mathfrak{A}_k + \mathfrak{A}_i$, denn an dem Massenpunkt m kann (nach S. 43) für die Arbeit der Mittelkraft aus K und S ohne weiteres die Arbeitssumme der Einzelkräfte gesetzt werden. Stellt man diese Gleichung für sämtliche Massenpunkte auf, so ergibt sich durch Zusammenzählen:

$$1) \qquad \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i.$$

Oder die Zunahme des ganzen Körpers an Arbeitsvermögen ist gleich der Arbeitssumme der äufseren und der inneren Kräfte. Es läfst sich zeigen, dafs die Arbeit der inneren Kräfte für einen starren Körper Null ist.

Die inneren Kräfte treten zwischen je zwei Massenpunkten paarweise gleich und entgegengesetzt auf. Betrachten wir ein Paar solcher Massenpunkte m und m_1 (Fig. 183) mit den inneren Kräften S, welche beispielsweise gegenseitige Anziehungskräfte sein mögen, und nehmen wir an, dafs sich die Punkte um ds bezw. ds_1 bewegen. Zerlegen wir dann die Kräfte S in X, Y, Z; ds in die Projektionen dx, dy, dz; ds_1 in dx_1, dy_1, dz_1, so wird an m die Arbeit verrichtet: $X dx + Y dy + Z dz$, an m_1 aber $-(X dx_1 + Y dy_1 + Z dz_1)$. Die Arbeitssumme an beiden Punkten ist also

Fig. 183.



$$d\mathfrak{A}_i = -\left\{X \cdot d(x_1 - x) + Y \cdot d(y_1 - y) + Z \cdot d(z_1 - z)\right\}.$$

Bildet aber S mit den Achsenrichtungen die Winkel α, β, γ, so ist, wenn x, y, z bezw. x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von m und m_1, a ihre Entfernung:

$$X = S \cos \alpha = S \frac{x_1 - x}{a},$$

$$Y = S \cos \beta = S \frac{y_1 - y}{a},$$

$$Z = S \cos \gamma = S \frac{z_1 - z}{a}.$$

Daher kann man schreiben:

$$d\mathfrak{A}_i = -\frac{S}{2a} d\left\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\right\}, \text{ oder,}$$

weil $x_1 - x$, $y_1 - y$ und $z_1 - z$ die drei Projektionen von a:

$$d\mathfrak{A}_i = -\frac{S}{2a} d(a^2) = -\frac{S}{2a} 2a \cdot da = -S \cdot da.$$

Ist also der Abstand a der beiden Punkte veränderlich, so verrichten die inneren Kräfte S eine Arbeit; dies wird gelten für elastisch-feste Körper, die während der Betrachtung ihre Form ändern. Für starre Körper aber ist $da = 0$, mithin auch $d\mathfrak{A}_i = 0$. Also:

Bei starren Körpern ist die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich der Arbeitsumme der äußeren Kräfte

$$2) \qquad \Sigma {}^1\!/_2 m v^2 - \Sigma {}^1\!/_2 m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k.$$

Hatte ein starrer Körper zu Anfang keine Bewegung, war die Geschwindigkeit aller Punkte Null und überläßt man ihn der alleinigen Einwirkung der Schwere, so führt er (nach S. 164/65) eine lotrechte Verschiebung aus, bei welcher der Schwerpunkt und somit auch jeder andere Punkt eine lotrechte, gleichförmig beschleunigte Fallbewegung hat. Die Arbeit der Schwerkräfte richtet sich (S. 163) allein nach der Senkung h des Schwerpunktes und beträgt Mgh. Da in einem Augenblicke sämtliche Punkte dieselbe Geschwindigkeit haben, so ist einfach ${}^1\!/_2 Mv^2 - {}^1\!/_2 Mc^2 = Mgh$, genau wie beim Massenpunkte.

Wird der Körper aber in schräger Richtung so fortgeworfen, daß zu Anfang die Bewegung ebenfalls ohne jede Drehung erfolgt, daß also sämtliche Punkte die gleiche Geschwindigkeit c haben, so muß (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes) die weitere Bewegung ebenfalls eine Verschiebung sein, und zwar wird der Schwerpunkt, und damit jeder andere Punkt, die Wurfparabel (S. 49) beschreiben, genau wie ein einfacher Massenpunkt.

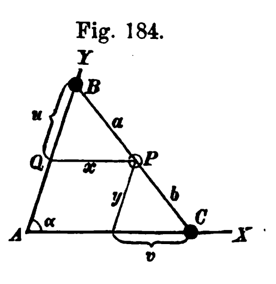
II. A. Gleichgewicht starrer Körper.

1. Gleichgewichts-Bedingungen.

Man bezeichnet einen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämtlichen Massenpunkte im Gleichgewichte sind, d. h. eine geradlinig-gleichförmige Bewegung ausführen, oder (als Sonderfall) in Ruhe sind; in letzterem Falle haben sie weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung. Solcher Gleichgewichtszustand besteht offenbar, wenn der Körper eine gleichförmige und geradlinige Verschiebung erleidet, u. zw. ist eine derartige Verschiebung auch die einzige Möglichkeit des Gleichgewichtes. Man könnte vielleicht meinen, dafs die Punkte eines Körpers sich auch geradlinig bewegen könnten, ohne dafs diese Bahnlinien notwendig einander parallel sein müfsten, doch läfst sich zeigen, dafs dies bei starren Körpern nicht möglich ist.

Denkt man sich den Punkt B (Fig. 184) längs einer Geraden AY, den Punkt C längs einer Geraden AX geführt und haben B und C eine unveränderliche Entfernung, so wird ein beliebiger Punkt P der Verbindungsgeraden, der von B und C um a bezw. b absteht, eine Ellipse beschreiben.

Fig. 184.



Nennt man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes P x und y, setzt $AB - y = u$, $AC - x = v$, so ist in dem Dreiecke BPQ,

$$a^2 = u^2 + x^2 - 2ux \cos \alpha .$$

Ferner ist nach der Figur $u : y = a : b$; setzt man dies ein, so wird

$$a^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + x^2 - 2 \frac{a}{b} y x \cos \alpha ,$$

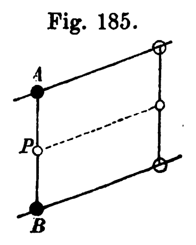
oder

$$1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y}{b} \frac{x}{a} \cos \alpha .$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Führt man also 2 Punkte A und B eines starren Körpers in nicht parallelen Geraden, so

bewegen sich die sonstigen Punkte der Geraden AB nicht in geraden Linien. Nur wenn die Führungslinien der Punkte A und B parallele Gerade sind (Fig. 185), beschreibt auch jeder andere Punkt der AB eine Gerade. Ein Körper ist also nur im Gleichgewichte bei einer gleichförmig-geradlinigen Verschiebung oder beim Ruhezustande (Verschiebung mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung Null). Hierbei haben alle Massenpunkte die Beschleunigung Null, es sind mithin alle Ergänzungskräfte Null. Nach dem Satze d'Alembert's (S. 163) müssen sich also sämtliche äufsere Kräfte schon unter sich allein aufheben.

Fig. 185.



Umgekehrt folgt aber aus dem gegenseitigen Aufheben der äufseren Kräfte noch nicht, dafs der Körper im Gleichgewichte sei; vielmehr mufs dazu aufserdem noch die Bedingung erfüllt sein, dafs der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte. Ist im Anfange Ruhe oder gleichförmige geradlinige Verschiebung, also Gleichgewicht, vorhanden, so wird dieses andauern, solange sich die äufseren Kräfte aufheben. Etwaige äufsere Kräfte lassen sich am starren Körper auf eine Mittelkraft R und ein Achsenmoment $\mathfrak{M}$ zurückführen; und weil R und $\mathfrak{M}$ im allgemeinen nicht vereinigt werden können, so ist zum Aufheben der gegebenen Kräfte erforderlich, dafs gleichzeitig $R = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ sei, und dies ist nach Gleichung 1, 2, 3, 4, 6 (S. 136) nur möglich, wenn

$$1)\ \Sigma K \cos \alpha = 0; \quad 2)\ \Sigma K \cos \beta = 0; \quad 3)\ \Sigma K \cos \gamma = 0;$$

$$4)\ \mathfrak{M}_x = 0; \quad 5)\ \mathfrak{M}_y = 0; \quad 6)\ \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\mathfrak{M}_x$ u. s. w. nach S. 138 kann man also aussprechen:

Die an einem starren Körper wirkenden Kräfte heben sich auf, wenn in Bezug auf ein beliebiges Achsenkreuz

1. die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung parallel zu jeder Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte Null ist, und wenn zugleich

2. die algebraische Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede der Achsen Null ist.

Für Gleichgewicht haben also die äufseren Kräfte im allgemeinen sechs Bedingungen zu erfüllen.

Liegen die Kräfte aber durchweg in derselben Ebene, so wähle man diese zur xy-Ebene; es fällt dann die Gl. 3 (S. 136) aus, weil in der z-Richtung überhaupt keine Seitenkräfte sich ergeben; auch die Momentengleichungen 4 und 5 fallen fort, weil die in der xy-Ebene liegenden Kräfte in Bezug auf die x- und y-Achsen, welche mit ihnen in derselben Ebene liegen, keine Momente haben (S. 100). $\mathfrak{M}_z$ bedeutet dann die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Kräfteebene. Aufserdem wird noch $\cos\beta = \sin\alpha$, und es verbleiben die drei Bedingungen (vergl. auch S. 110/111):

$$7)\qquad \Sigma K\cos\alpha = 0;\quad \Sigma K\sin\alpha = 0;\quad \mathfrak{M}_z = \Sigma Kl = 0.$$

Liegt die x-Achse wagerecht, die y-Achse lotrecht, so heifsen die Bedingungen in Worten:

Die algebraische Summe aller wagerechten Seitenkräfte, die algebraische Summe aller lotrechten Seitenkräfte und die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

2. An einem Punkte befestigter Körper.

Ist ein Punkt A eines starren Körpers unwandelbar befestigt und soll der Körper in Ruhe bleiben, so mufs der Punkt eine Widerstandskraft W leisten, welche den sonstigen an dem Körper auftretenden Kräften das Gleichgewicht hält. Sind diese Kräfte nur Schwerkräfte, so lassen sie sich zu dem durch den Schwerpunkt S gehenden Gesamtgewichte Q zusammensetzen. Es mufs daher W genau das Entgegengesetzte von Q sein. Daher mufs der Befestigungspunkt A in der Schwerpunkts-Lotrechten des Körpers liegen. Hierbei verhält sich aber der Körper, wenn er durch eine Drehung um A aus der Gleichgewichtslage gebracht wurde, verschieden, je nach der Höhenlage des Befestigungspunktes A.

Fig. 186.

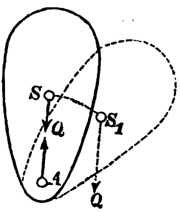
Lag nämlich beim Ruhezustande der Befestigungspunkt A oberhalb des Schwerpunktes (Fig. 186), so kann der aus der Ruhelage in die punktierte schräge Lage gebrachte Körper, wenn man ihn losläfst

nicht mehr im Gleichgewichte sein, weil Q nicht durch A hindurchgeht. Vielmehr dreht sich nun der Körper um den Befestigungspunkt und kommt (nach einer gewissen Anzahl Schwingungen) erst wieder zur Ruhe, wenn er die ursprüngliche Lage wieder erreicht hat. Er kehrt also unter Einwirkung der Schwere in den früheren Gleichgewichtszustand zurück, deshalb nennt man diesen einen sicheren (stabilen) Gleichgewichtszustand.

Im Ruhezustande geht hiernach die Schwerpunkts-Lotrechte durch den Aufhängepunkt. Hängt man daher einen Körper nacheinander in verschiedenen Punkten A und B auf, so bestimmt sich dadurch in jeder Ruhelage eine Gerade, die den Schwerpunkt enthalten mufs. Mittels zweimaliger Aufhängung kann also der Schwerpunkt eines Körpers durch Versuche gefunden werden.

Lag der Befestigungspunkt A lotrecht unter dem Schwerpunkte (Fig. 187), so kann der Körper nach einer seitlichen Verdrehung nicht wieder von selbst in die ursprüngliche Lage zurückkehren, vielmehr entfernt sich der Körper gänzlich aus der früheren Lage und sucht sich eine neue sichere Gleichgewichtslage, wobei der Schwerpunkt unterhalb S zu liegen kommt. Der anfängliche Zustand heifst dabei ein unsicherer (labiler) Gleichgewichtszustand; derselbe kann nur durch vorsichtiges Balancieren erhalten werden. Unentschieden (indifferent) heifst der Zustand, wenn der Befestigungspunkt A mit dem Schwerpunkte zusammenfällt (Fig. 188). In diesem Falle besteht bei jeder Richtung des Körpers Gleichgewicht.

Fig 187.



Zu beachten ist noch, dafs im sicheren Gleichgewichte der Schwerpunkt so tief wie möglich liegt, dafs bei einer Verdrehung aus derselben der Schwerpunkt gehoben werden mufs, wozu ein äufserer Arbeitsaufwand nötig ist. Beim unsicheren Gleichgewichte liegt der Schwerpunkt so hoch wie möglich. Bei einer Störung desselben verrichtet die Schwerkraft positive Arbeit und erzeugt Geschwindigkeit; die Wiederherstellung des Gleichgewichts verlangt Hebung des Schwerpunktes, d. h. Aufwendung äufserer Arbeit. Beim unentschiedenen Gleichgewicht ist zu einer Drehung um den Schwerpunkt weder positive noch negative Arbeit erforderlich.

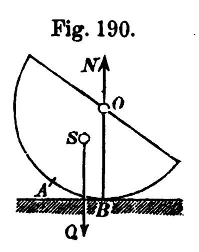
Fig. 188.

Die Befestigung eines Körpers an nur einem **Punkte** kommt ziemlich selten vor, ist auch gar nicht sehr einfach zu verwirklichen. Viel häufiger und einfacher ist die Befestigung an einer wagerechten geraden Linie, oder die Aufhängung eines Körpers an einer wagerechten **Achse**, etwa mittels Hindurchtreibens eines glatten, runden Drahtstiftes oder Hindurchsteckens eines glatten Bolzens durch ein zylindrisches Loch. Dafür gelten die vorstehenden Figuren ebenfalls, indem A die Projektion der Achse darstellt; die Bedingungen für die verschiedenen Arten des Gleichgewichts sind die gleichen.

Unterstützte Körper. Ähnliche Betrachtungen gelten für den Gleichgewichtszustand eines Körpers, der sich mittels kugelförmiger Fläche auf eine wagerechte Ebene stützt (Fig. 189). Hierbei geht der Normalwiderstand N durch den Krümmungsmittelpunkt O der Kugelfläche hindurch, auch wenn man den Körper etwas aus der aufrechten Lage entfernt (Fig. 190), und dieser Punkt O tritt nun für die Beurteilung der Sicherheit des Gleichgewichtes an die Stelle des Befestigungspunktes A. Stellt man den Körper schief durch Drehung nach rechts, so geht der Normalwiderstand N nicht mehr durch A, sondern durch den neuen Berührungspunkt B, stets aber auch durch O. N und Q bilden ein Kräftepaar, welches den Körper, falls S unterhalb O lag, in die Gleichgewichtslage zurückführt; zugleich hat S in der Gleichgewichtsstellung die tiefste mögliche Lage, und zur Störung des Gleichgewichtes ist äufserer Arbeitsaufwand erforderlich. Das Gleichgewicht war daher ein **gesichertes**. Liegt S oberhalb O, so entspricht dem Gleichgewichte die höchste mögliche Lage von S, das Gleichgewicht ist ein **unsicheres**. Fallen S und O zusammen, so ist das Gleichgewicht **unentschieden**, bleibt auch nach einer kleinen Drehung noch bestehen.

Fig. 189.

Fig. 190.



Die Vertauschung der unteren Kugelfläche mit einer Zylinderfläche entspricht der obigen Ersetzung eines Befestigungspunktes A durch eine Drehachse.

Eine homogene Kugel befindet sich auf wagerechter Ebene im unentschiedenen Gleichgewicht, ebenso ein Cylinder. Halbkugel und Halbzylinder aber sind im sicheren Gleichgewichte.

Beispiel: Wie hoch mufs in Fig. 191 der Kegel sein, damit der aus Halbkugel und Kegel bestehende Körper im unentschiedenen Gleichgewichte sei? Der Gesamtschwerpunkt S mufs in O liegen, und dazu ist erforderlich (S. 146/47)

$$M_1 \cdot SS_1 = M_2 \cdot SS_2 .$$

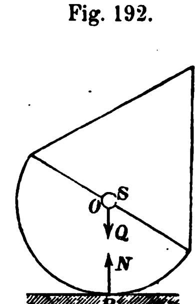
Die Dichte des Kegels sei γ_1, die der Halbkugel γ_2, dann kann man statt des Verhältnisses der Massen das Verhältnis der Gewichte setzen, und weil $SS_1 = {}^1/_4 h$, $SS_2 = {}^3/_8 r$ (S. 157/58), so wird

$$\gamma_1 \frac{r^2 \pi h}{3} \frac{h}{4} = \gamma_2 \frac{2}{3} r^3 \pi \frac{3}{8} r .$$

Daraus folgt $h^2 = \frac{3\gamma_2}{\gamma_1} r^2$.

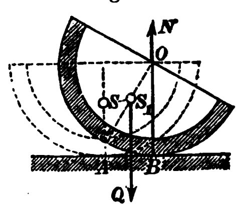
Fig. 191.

Fig. 192.



Sind die Einzelkörper aus demselben Stoffe, so wird $h^2 = 3r^2$. Die entsprechende Kegelseite wird dann $= 2r$; die Projektion des Kegels also ein gleichseitiges Dreieck (wie in Fig. 191 und 192 gezeichnet).

Fig. 193.



Ist aber der Kegel aus Holz, die Halbkugel aus Metall, etwa mit $\gamma_2 = 9\gamma_1$, so wird

$$h = 3r\sqrt{3} = 5{,}20\, r .$$

Soll das Gleichgewicht sicher sein, so mufs man h kleiner machen.

Besteht der Aufsatz aus einem Zylinder, so ist die Bedingung für unentschiedenes Gleichgewicht

$$h^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{r^2}{2} .$$

Fig. 194.

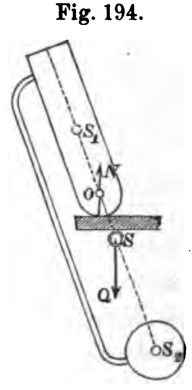


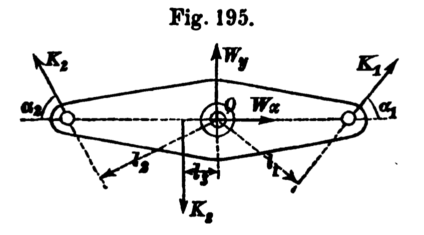
Fig. 193 zeigt den sicheren Gleichgewichtszustand einer Halbkugelschale. Ist bei einer solchen die Wandstärke gering, so liegt der Schwerpunkt nach S. 156 im Abstand ${}^1/_2 r$ vom Mittelpunkt O.

Fig. 194 (aus Ritter's Mechanik entnommen) zeigt, wie der obere Körper mit hoch liegendem Schwerpunkt S_1 durch starre Verbindung mit einer tiefer liegenden Kugel S_2 zu einem zusammengesetzten Körper mit dem Schwerpunkte S und mit sicherem Gleichgewicht umgeändert werden kann.

3. Hebel.

Ein Hebel ist ein fester Körper, der nur um eine feste Achse O drehbar und zum Angriffe verschiedener Kräfte eingerichtet ist. Das eigene Gewicht wird ebenso wie jede andere am Hebel auftretende Kraft behandelt und kann häufig gegen die sonstigen Kräfte vernachlässigt werden.

Fig. 195.



Die Kräfte mögen sämtlich in der Bildebene, rechtwinklig zur Achse O liegen (Fig. 195). Die Achse, völlig glatt angenommen, leistet einen durch die geometrische Drehachse gehenden Widerstand W, der nach Gröfse und Richtung unbekannt ist, für welche beiden Unbekannten aber besser die beiden Seitenkräfte W_x und W_y eingeführt werden. In dem Falle der Fig. 195 heifst die Gleichung der wagerechten Kräfte

1) $$W_x + K_1 \cos\alpha_1 - K_2 \cos\alpha_2 = 0,$$

die Gleichung der lotrechten Kräfte

2) $$W_y + K_1 \sin\alpha_1 = K_2 \sin\alpha_1 - K_3 = 0;$$

die Gleichung der Momente wird am besten auf die wirkliche Drehachse bezogen, weil dann W_x und W_y in ihr nicht vorkommen, sondern nur die bewegenden Kräfte K. Es ist

3) $$0 = - K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3 .$$

Häufig kommt es auf die Kenntnis des Widerstandes W der Drehachse nicht an; dann ist letzte Gleichung die allein mafsgebende: Bei einem Hebel mufs für den Gleichgewichtszustand die Momentensumme aller Kräfte in Bezug auf die Drehachse Null sein. Oder die Kräfte K müssen eine durch O gehende Mittelkraft haben.

Sind sämtliche Hebelarme gegeben, auch die beiden Kraftgröfsen K_2 und K_3, so ist durch die Momentengleichung K_1 bestimmt. Hiernach kann man dann aus den Gleichungen 1 und 2 auch W_x und W_y berechnen. Die für die Momente in Frage kommenden Hebelarme sind im allgemeinen nicht die Abstände

der Angriffspunkte der Kräfte von der Drehachse, sondern die rechtwinkligen Abstände der Kraftrichtungen von der Drehachse.

Fig. 196.

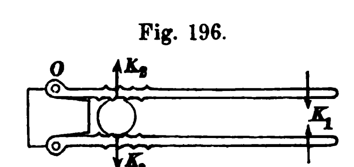


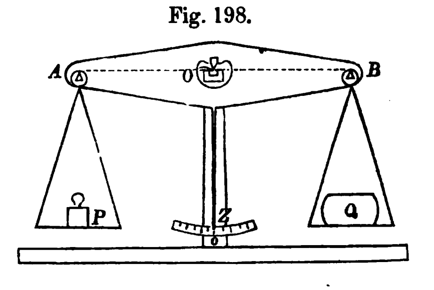
Fig. 197.

Fig. 196 zeigt die Vereinigung zweier Hebel zu einem Nufsknacker, Fig. 197 einen um O drehbaren Pumpenschwengel; K_1 ist die Triebkraft, K_2 der Widerstand der Pumpenstange.

4. Hebelwagen.

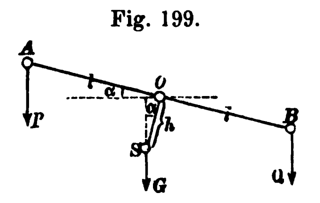
Gleicharmige Hebelwage. Der Wagebalken ist mit einer wagerechten Drehachse O versehen (Fig. 198), welche zur Verminderung der Reibung durch eine auf eine sog. Pfanne sich stützende Stahlschneide gebildet wird. Bei A und B sind in gleichen Abständen l von O ebenfalls Schneiden angeordnet, an denen gleich schwere Wagschalen aufgehängt sind. Die geometrischen Drehachsen A, O und B mögen in einer Flucht liegen. Es ist zunächst erforderlich, dafs der Wagebalken unter der Last der beiden gleich schweren Schalen sich wagerecht stelle und diese Stellung durch einen Zeiger Z markiere. Diese Bedingung wird, wie sich aus dem folgenden ergibt, erfüllt, wenn der Wagebalken für sich allein, d. h. ohne die Wagschalen in sicherem Gleichgewicht ist, wenn also sein Schwerpunkt S um eine Gröfse h unterhalb der Drehachse O liegt. Im Ruhezustand üben die bei A und B angehängten Wagschalen auch gleiche Kräfte auf den Balken aus und halten ihn im Gleichgewichte. Dasselbe gilt, wenn die Wagschalen mit Körpern von gleichem Gewichte belastet werden, Ist aber der Körper vom Gewichte Q auf der rechten Seite schwerer als das Gewichtsstück P

Fig. 198.



auf der linken (Fig. 199), so entsteht eine Drehung des Balkens, bei der die rechtseitige Schale sinkt; weil aber S **unterhalb** O liegt, so tritt nun das Gewicht G des Balkens auf die linke Seite und kommt mit seinem Momente dem der kleineren Belastung zu Hülfe, so daſs bei einem bestimmten Ausschlagwinkel α wieder sicheres Gleichgewicht eintritt. Die Beziehung zwischen dem Gewichtsunterschiede $Q - P$ und dem Winkel α ist sehr einfach, wenn A, O und B in einer Geraden liegen, ist aber auch nicht schwierig, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Hier soll nur der einfachste Fall betrachtet werden. Da es nur auf den Gewichtsunterschied ankommt, so mögen die Gewichte der Schalen und Ketten in P und Q mit enthalten sein. Dann entsteht die Momentengleichung

Fig. 199.



$Ql \cos\alpha = Pl \cos\alpha + Gh \sin\alpha$, oder

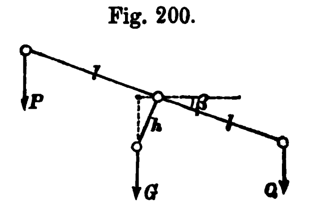
$$1) \qquad Q - P = G\frac{h}{l}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Bei der vorausgesetzten einfachen Anordnung ist der Gewichtsunterschied $Q - P$ mit der Tangente des Ausschlagwinkels verhältnisgleich, so daſs aus der Beobachtung von α der Unterschied $Q - P$ ersehen werden kann.

Beispiel: Es sei G (Gewicht des Wagebalkens) $= 2$ kg, $h = 1{,}5$ cm, $l = 30$ cm, $\alpha = 6^\circ$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}1$, dann ist $Q - P = 2\frac{1{,}5}{30} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{100}$ kg $= 10$ g. Einem Winkel von 6° muſs also an der Zeigerteilung die Bezeichnung 10 g entsprechen.

Beim Gebrauche der Wage kann natürlich die Gleichgewichtsstellung nicht sofort eintreten; es muſs aber dann ein Moment vorhanden sein, welches die Wage zum **Einspielen** bringt. Unter Einspielen versteht man das Schwingen um eine sichere Gleichgewichtslage, das Bestreben, dieselbe einzunehmen.

Fig. 200.



Einem Gewichtsunterschiede $Q - P$ möge ein Ausschlagwinkel α entsprechen, so daſs $Gh = (Q - P)l : \mathrm{tg}\,\alpha$. Beträgt dann der augenblickliche Abweichungswinkel von der Wagerechten β und hält man die Wage für einen Augenblick fest, so entsteht, wenn $\beta > \alpha$ gedacht wird,

ein links herum drehendes, nach der Gleichgewichtslage treibendes Moment

$$\mathfrak{M} = G h \sin \beta - (Q - P)\, l \cos \beta.$$

Setzt man hierin den vorstehenden Wert für $G h$ ein, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{(Q - P)\, l}{\operatorname{tg} \alpha} \sin \beta - (Q - P)\, l \cos \beta$$

$$= (Q - P)\, l \cos \beta \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} - 1\right).$$

Hiernach ist $\mathfrak{M} \gtreqless 0$, wenn $\beta \gtreqless \alpha$. $\mathfrak{M}$ nennen wir das Einspielungs-Moment.

Da $Q - P$ für Gleichgewicht verhältnisgleich mit $\operatorname{tg} \alpha$, wobei $\operatorname{tg} \alpha$ zwischen 0 und ∞ jeden Wert haben kann, so kann man theoretisch jeden beliebig grofsen Gewichtsunterschied $Q - P$ mit Hülfe des Ausschlagwinkels α messen, kann also ein Gewichtsstück P ganz entbehren, Q allein durch α ermitteln. Nach diesem Grundgedanken ist eingerichtet die

Zeigerwage, welche zum Wägen von Briefen, Garnen, Papieren bestimmt ist. Fig. 201 entspricht einer Garnwage, bei welcher keine Schale benutzt, sondern das Garn unmittelbar an den rechtsseitigen Haken aufgehängt wird. Die Fig. 201 stellt den unbelasteten Zustand dar, wobei der Zeiger auf Null steht; der Schwerpunkt S des Wagebalkens mufs entsprechend um h lotrecht unter der Drehachse O liegen. Wird bei A ein Gewicht Q eingehängt, so bildet sich eine neue Gleichgewichtslage mit einem Ausschlagwinkel α, um den sich der ganze Hebel $A O B$ verdreht und der an der Teilung mefsbar wird. Für die Momentengleichung ist nur die Lage der Punkte A, O und S (Fig. 202) mafsgebend, und es wird $Q l \cos \alpha = G h \sin \alpha$ oder $Q = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha$, entsprechend Gl. 1, S. 177 für $P = 0$.

Fig. 201.

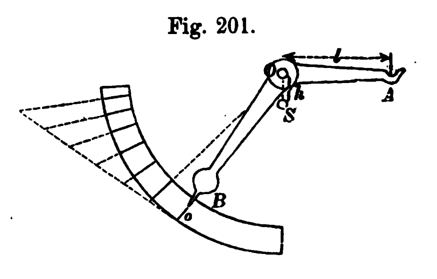


Fig. 202.

$G h : l$ ist ein unveränderlicher Festwert für eine bestimmte Wage. Auf dem Kreisbogen wird man bei den Teilstrichen nicht Zahlen für die Winkel α, sondern sogleich für die entsprechenden

Gewichte Q einritzen. Die Teilung ist dann selbstverständlich nicht gleichmäfsig, da mit wachsendem Winkel die Tangente immer schneller wächst. Die Gewichtsteilung wird daher mit zunehmendem α enger und enger werden; darin findet dann die Anwendbarkeit der Wage ihre Grenze.

Beispiel: Entspricht z. B. einem Gewichte von 10g ein Ausschlag von 10°, so ist

$$10 = G\frac{h}{l}\,\mathrm{tg}\,10^0 = 0{,}176\,G\frac{h}{l}.$$

Will man nun die Ausschlagwinkel für Vielfache von 10g haben, so hat man zu bedenken, dafs tg α mit Q verhältnisgleich wächst.

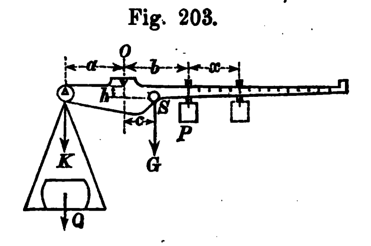
Für 20g ist $\mathrm{tg}\,\alpha = 2 \cdot 0{,}176 = 0{,}352$; $\alpha = 19^0\,24'$,
„ 100g „ $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}76$; $\alpha = 60^0\,24'$,
„ 200g „ $\mathrm{tg}\,\alpha = 3{,}52$; $\alpha = 74^0\,9'$,
„ 300g „ $\mathrm{tg}\,\alpha = 5{,}28$; $\alpha = 79^0\,17'$,
„ 400g „ $\mathrm{tg}\,\alpha = 7{,}04$; $\alpha = 81^0\,55'$,
„ 500g „ $\mathrm{tg}\,\alpha = 8{,}80$; $\alpha = 83^0\,31'$,
„ 1000g „ $\mathrm{tg}\,\alpha = 17{,}60$; $\alpha = 86^0\,45'$.

Während also die Teilstriche für Null und für 100g um 60° voneinander abstehen, sind die für 500 und 1000g nur 3° voneinander entfernt.

Die Teilung der Wage kann man leicht durch Zeichnung finden, indem man bei der Nullstellung des Zeigers OB eine Tangente an den Teilkreis vom Halbmesser r legt (Fig 201). Trägt man von OB aus den Winkel von 10 Graden ab, welcher dem Gewichte von 10 Grammen entsprach, so bekommt man auf der Berührungsgeraden sofort $r \cdot \mathrm{tg}\,10^0$. Dieses Mafs $r\,\mathrm{tg}\,10^0 = 0{,}176\,r$ hat man dann auf der Berührungsgeraden 100 mal abzutragen bis zu einer Länge $= 17{,}6\,r$. Zieht man nun von der Achse O aus Strahlen nach diesen Teilpunkten, so bekommt man auf dem Teilkreise die Striche, welche den Gewichten bis zu 1000g zugehören.

Bei der Schnellwage (Fig. 203) wird nicht der Ausschlagwinkel α benutzt, vielmehr dient zum Abwägen ein der Gröfse nach unveränderliches, auf dem wagerecht einzustellenden Hebel aber verschiebbares, sog. Laufgewicht. Es liegt bei dieser Wage der Schwerpunkt S des unbelasteten Wagebalkens nicht lotrecht unter der Drehschneide O, sondern um c nach rechts und um h nach unten. Die Gröfse h ist, wie sich zeigen wird, für das Einspielen mafsgebend.

Fig. 203.



Ist K das Gewicht der leeren Schale, so gilt für das Gleichgewicht mit angehängter leerer Schale

1) $$Ka = Gc + Pb.$$

Legt man dann noch die Last Q auf die Schale, so mufs das Laufgewicht P um x nach rechts verschoben werden, und wenn dann wieder eine wagerechte Ruhestellung des Hebels erreicht ist, so gilt dafür

2) $$(K + Q)a = Gc + P(b + x);$$

nach Abziehen der früheren Gleichung bleibt

3) $$Qa = Px, \text{ mithin } Q = Px:a.$$

$P:a$ ist der Festwert der Wage, Q mit x verhältnisgleich, die Teilung des Laufhebels also gleichmäfsig.

Bringt man die für wagerechte Ruhestellung belastete Wage durch Rechtsdrehung um den Winkel α aus dem Gleichgewichte, so ist dazu ein Moment $\mathfrak{M}$ aufzuwenden, welches man leicht findet zu

$$\mathfrak{M} = (K + Q)\, a \cos\alpha - P(b + x)\cos\alpha - Gc\cos\alpha + Gh\sin\alpha.$$

Führt man hierin Gl. 2 ein, so bleibt $\mathfrak{M} = Gh\sin\alpha$ als Einspielungsmoment, welches also ein positives h bedingt, aber von c unabhängig ist.

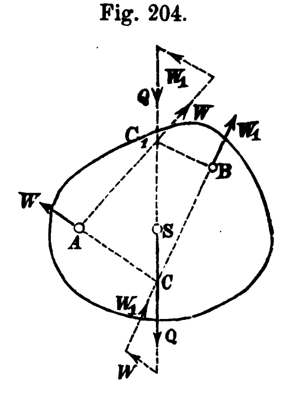
Alle diese Wagen, bei denen zur Ausführung der Wägung Gewichtstücke oder das eigene Gewicht eines Teiles der Wage (des Balkens) benutzt werden, liefern nicht eigentlich das wirkliche Gewicht des vorliegenden Körpers, d. h. die Gröfse der Anziehungskraft, welche der Körper von der Erde erfährt, sondern nur das Verhältnis seines Gewichtes zu dem Gewichte eines anderen Körpers an derselben Stelle der Erdoberfläche. Ein Körper, welcher eine richtige gleicharmige Hebelwage mit einem Gewichtstücke von der Bezeichnung „1 Kilogramm" auf der anderen Seite wagerecht (bezw. auf Null) stellt, erfährt am Meeresspiegel unter 45^0 geogr. Breite von der Erde eine Anziehungskraft $= 1^{\text{kg}}$, am Äquator aber beträgt die Schwerkraft des Körpers sowohl wie des Gewichtstückes nach S. 94 nur $0{,}997^{\text{kg}}$. Eine solche Wägung stellt also eigentlich die Masse eines Körpers fest; so ist die Masse des eben beschriebenen Körpers ebenso wie diejenige des Gewichtstückes auf Grund der in diesem Buche gewählten Einheiten (S. 34) $1:g = 1:9{,}806$ Masseneinheiten, u. zw. unveränderlich an jeder Stelle der Erde und des Weltenraumes.

Federwagen dagegen, welche durch bestimmte **Kräfte** eine bestimmte, ablesbare Formänderung erleiden, zeigen die auf einen Körper ausgeübte Schwerkraft. Eine Federwage, deren Teilung an einem Ort angefertigt war, wo die Fallbeschleunigung 9,806 beträgt, wird an diesem Ort unter einer Belastung mit einem Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm" oder mit 1 ¹ Wasser die Schwerkraft zu 1 ᵏᵍ angeben, wird aber am Äquator unter derselben Last nur 0,997 ᵏᵍ zeigen. Beim Kauf und Verkaufe kommt es im Grunde genommen auf die Masse eines Körpers an. Für den Käufer sind daher solche Federwagen nachteilig, die an einem Orte geteilt wurden, wo die Fallbeschleunigung kleiner ist als an dem Gebrauchsorte. Eine Federwage, deren Teilung am Äquator angefertigt wurde, die also dort unter Belastung mit 1 ¹ Wasser von 4° C. oder einem ebenso schweren Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm" die Schwerkraft mit 1 ᵏᵍ ablesen liefs, wird unter Belastung mit dem gleichen Körper oder einem Körper gleicher Masse unter 45° geogr. Breite die Schwerkraft zu 1,003 ᵏᵍ angeben, also schon durch eine Last von 0,997 ¹ Wasser zu einer Gewichtsangabe von 1 ᵏᵍ gebracht werden.

5. Zweifach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Ist ein unter Einwirkung seines Gewichtes Q stehender Körper an zwei Punkten A und B befestigt (Fig. 204), so wirken an diesen Widerstände W und W_1, welche mit Q im Gleichgewichte sein müssen. Die Mittelkraft von W und W_1 mufs also das Entgegengesetzte von Q sein, oder es müssen W, W_1 und Q in einer Ebene liegen, und zwar in einer lotrechten Ebene, weil Q lotrecht ist. Da nun Q durch S geht, W und W_1 durch A bezw. B, so ist Ruhe des Körpers nur möglich, wenn der Schwerpunkt desselben in einer durch A und B gehenden lotrechten Ebene liegt. Nehmen wir an, diese Bedingung sei in Fig. 204 erfüllt, dann stehen für die Ermittelung der unbekannten Widerstände W und W_1 nur die drei Gleichgewichts-

Fig. 204.



Bedingungen für Kräfte in einer Ebene (S. 110/171) zur Verfügung. Jeder Widerstand ist aber nach Gröfse und Richtung unbekannt, oder hat, nach bestimmten Richtungen zerlegt, zwei unbekannte Seitenkräfte. Sonach liegen für die Ermittelung der Widerstände der Befestigungspunkte vier Unbekannte und nur drei Gleichungen vor. Die Aufgabe ist also mittels der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht zu lösen, man nennt sie daher „statisch unbestimmt", und zwar im besonderen „einfach statisch unbestimmt", weil gerade eine Gleichung zu wenig vorhanden ist. Man kann diese Unbestimmtheit auch geometrisch erkennen. W, W_1 und Q müssen sich in einem Punkte schneiden, oder, da die Richtung von Q gegeben, W und W_1 müssen sich in einem Punkte der Geraden Q schneiden; in welcher Höhe dieser Punkt aber liegt, ist unbestimmt, richtet sich nach der besonderen Art, wie die Befestigung vorgenommen wurde, und ist im allgemeinen nur schwierig, in vielen Fällen auch gar nicht festzustellen. Nimmt man einen Schnittpunkt C der Kräfte an, so sind die Richtungen von W und W_1 bestimmt, es ist dann leicht das Kräftedreieck der drei Kräfte für Gleichgewicht (S. 63) zu zeichnen, womit auch die Gröfsen von W und W_1 feststehen. Ein anderer Punkt C_1 aber liefert ein anderes Ergebnis für W und W_1.

Ähnlich sind die Verhältnisse, wenn die Befestigung nicht an zwei Punkten A und B, sondern an zwei zur Bildebene rechtwinkligen wagerechten Achsen A und B erfolgt. Dann fällt die erste Frage, ob und wann der Körper im Ruhezustande sein kann, fort. Der Körper ist unwandelbar befestigt, an jeder Bewegung verhindert, — abgesehen vielleicht von einer Verschiebung längs der beiden Achsen, deren Möglichkeit für diese Untersuchungen keine Wichtigkeit hat.

Fig. 205.

Über die Art der Unbestimmtheit der Aufgabe bekommt man einige Aufklärung, wenn man die Widerstände W und W_1 zerlegt, u. zw. in den bestimmten Richtungen von A nach B und rechtwinklig dazu (Fig. 205). Nennt man die Seitenkräfte in der Richtung AB bezw. X und X_1, rechtwinklig dazu Y und Y_1 und bedenkt, dafs, wenn AB mit der Wagerechten

den Winkel α bildet, Q in $Q \sin \alpha$ und $Q \cos \alpha$ zerlegt werden kann, so lauten die Gleichungen der Kräftesummen in den beiden Achsenrichtungen

1) $$X + X_1 - Q \sin \alpha = 0$$

2) $$Y + Y_1 - Q \cos \alpha = 0.$$

Die Momente beziehen wir zweckmäfsig auf eine der Befestigungsachsen, z. B. A, weil dann die unbekannten Kräfte X, X_1 und Y aus der Momentengleichung fortbleiben; auch führen wir in diese Gleichung zweckmäfsig die ursprüngliche Kraft Q, nicht aber ihre Seitenkräfte ein. Dann ist nach den Bezeichnungen der Figur

3) $$0 = - Y_1 l + Q a \quad \text{oder} \quad Y_1 = \frac{Q a}{l}.$$

In den Gleichungen 2 und 3 kommen nur die Unbekannten Y und Y_1 vor, die daraus also zu bestimmen sind. Für X und X_1 steht aber nur die Gleichung 1 zur Verfügung; von diesen Kräften ist also nur die Summe bestimmbar, nicht aber die einzelnen Anteile. In der Richtung AB kann der Körper bei der Befestigung jede beliebige Anspannung erfahren, die sich im allgemeinen nicht erkennen läfst. Befestigt man z. B. ein hölzernes Brett mittels zweier Drahtstifte A und B an einer Holzwand, so kommt es bezüglich der Gröfse von X und X_1 auf die Art der Eintreibung der Drahtstifte an; durch die letzten Schläge kann man erreichen, dafs zwischen den Stellen A und B in dem Körper eine innere Zugkraft oder Druckkraft entsteht, deren Gröfse die Widerstände X und X_1 beeinflufst, bei Annahme starrer Körper aber völlig unbestimmbar ist.

Die in zweckmäfsiger Weise aufgestellte Momentengleichung 3 hat die gute Eigenschaft, dafs darin nur eine einzige Unbekannte vorkommt. Setzt man Y_1 nach Gl. 3 in Gl. 2 ein, so entsteht

4) $$Y = Q\left(\cos \alpha - \frac{a}{l}\right) = Q\left(\frac{a+b}{l} - \frac{a}{l}\right) = Q \frac{b}{l}.$$

Unmittelbar aber kommt man zu diesem Ergebnisse, wenn man die Gleichung der Kräftesumme in der Y-Richtung (Gl. 2) ganz fortläfst und dafür nochmals eine Momentengleichung anschreibt, jedoch in Bezug auf einen von A abweichenden Drehpunkt, den man so wählen mufs, dafs in der Gleichung womöglich nur diejenige Unbekannte

vorkommt, um deren Auffindung sich's gerade handelt, in diesem Fall also Y. Das wird erreicht durch die Wahl von B als Drehpunkt:

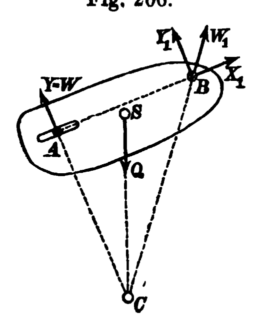


Fig. 206.

5) $$0 = Yl - Qb \quad \text{oder} \quad Y = Q\frac{b}{l},$$

wie in Gl. 4.

Von dieser Bevorzugung der Momentengleichungen in Bezug auf immer neue Drehpunkte wird in der Folge häufig Anwendung gemacht werden. Nur mufs man nicht erwarten, dadurch die Zahl der überhaupt verfügbaren Gleichungen vergröfsern zu können. Für das Gleichgewicht von Kräften in einer Ebene gibt es drei voneinander unabhängige Gleichungen, mag man dieselben für Kräftesummen oder für Momente aufstellen. Vergröfsert man die Zahl der Momentengleichungen durch Wahl immer neuer Drehpunkte, so bleiben die Gleichungen nicht mehr voneinander unabhängig, so dafs dadurch für eine unlösbare Aufgabe nichts gewonnen wird.

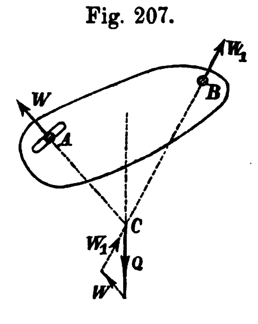


Fig. 207.

Die vorstehend behandelte Aufgabe verliert ihre Unbestimmtheit, wenn an einer der beiden Stellen, z. B. bei A, die Befestigung so geändert wird, dafs über die Richtung des Widerstandes W keine Unbestimmtheit herrscht, indem man, statt den hindurchgesteckten Bolzen oder Drahtstift von dem Körper rings umschliefsen zu lassen, in dem letzteren etwa einen länglichen Schlitz anbringt. Hat der Schlitz, wie in Fig. 206, die Richtung von A nach B, so kann bei A ein Widerstand X gar nicht geleistet werden; es wird $X = 0$ und $Y = W$; mithin $X = Q \sin \alpha$, womit die Widerstände sämtlich bestimmt sind. Auch die geometrische Lösung ist jetzt leicht möglich: Verlängert man die nun gegebene Richtung von W bis zum Schnitte C mit Q, so sind W und W_1 nach Fig. 204, S. 181, leicht bestimmt. Auch erkennt man, dafs die zeichnerische Behandlung

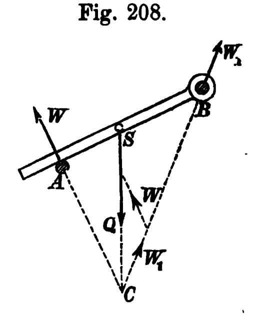


Fig. 208.

von gleicher Einfachheit ist, welche Richtung auch der Schlitz haben mag, wenn man nur die Richtung eines der Widerstände W oder W_1 bestimmt zu erkennen vermag (Fig. 207).

Fig. 209.

In Fig. 208 ist die Richtung von W durch den runden Auflagerungsbolzen A gegeben, dadurch der Punkt C und die Richtung von W_1 bestimmt, und man erkennt, dafs nun auch eine völlige Umschliefsung des Bolzens B nicht mehr nötig wäre, sondern eine Stützung nach Fig. 209 für das Gleichgewicht hinreichen würde. Fig. 208 bietet nur eine gröfsere Sicherheit gegen Störungen des Gleichgewichts durch Erschütterungen, Stöfse und das Hinzutreten neuer Kräfte. Scheinbar unwesentliche Änderungen der Form des Körpers in der Nähe der Unterstützungsstellen haben zuweilen sehr wichtige Folgen. Biegt man z. B. den Stab der Fig. 210 an seinem oberen Ende derartig um, dafs er den Bolzen B mit einer wagerechten Ebene berührt (Fig. 211), so wird W_1 lotrecht, der Schnittpunkt von Q und W_1 rückt in unendliche Ferne, und dadurch wird W ebenfalls lotrecht, so dafs nun die in Fig. 210 erforderlich gewesene seitliche Sicherung bei A entbehrlich wird. Die Gröfsen von W und W_1 ergeben sich mittels der Momentengleichungen zu $W = Qb : l$; $W_1 = Q \cdot a : l$.

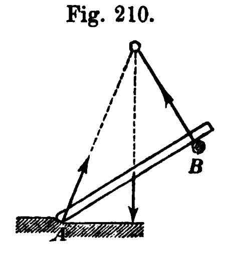


Fig. 210.

Fig. 211.

Auflagerung der Dachsparren auf Dachpfetten. Die Dachpfette möge die Form eines aufrecht stehenden Rechtecks haben (Fig. 212); der Sparren sei für die Auflagerung entsprechend ausgeschnitten. An den lotrechten Berührungsstellen kann keine Kraft auftreten, denn es müfste $H + H_1 = 0$ sein, und weil keine dieser Kräfte negativ werden kann, so müssen beide Null sein. An den wagerechten Berührungsstellen treten die lotrechten Widerstände A und B auf, die sich genau berechnen wie im vorhergehenden Falle.

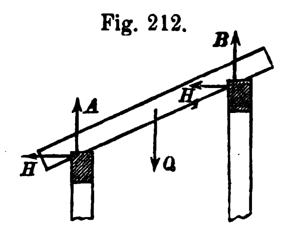


Fig. 212.

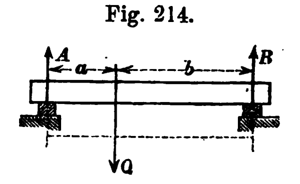
Das Gewicht der Dachsparren übt daher auf die die Pfetten tragenden Wände nur lotrechte Drücke (das Entgegengesetzte von A und B) aus, wenn man von der Reibung absieht.

Fig. 213.

Anders ist aber die Sache, wenn die Pfetten für die Auflagerung der Sparren schräg abgeschnitten sind (Fig. 213). Ist dann etwa nur bei B eine Nagelung ausgeführt, nicht aber in A, so werden die Widerstände W und W_1 beide schräg. Die Entgegengesetzten derselben wirken auf die Tragwände der Pfetten.

Die Richtung der Widerstände wird durch die gegenseitige Höhenlage der Stützflächen nicht beeinflufst; besonders häufig ist die Auflagerung eines wagerechten Balkens auf zwei Stützflächen (Fig. 214). Dann wird wiederum, wenn Q das Gesamtgewicht des Balkens (einschl. etwaiger Last) bezeichnet,

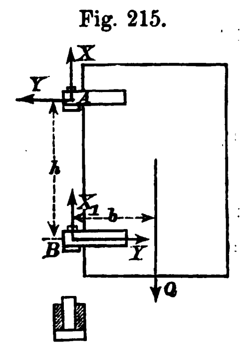
Fig. 214.



$$A = Q\frac{b}{l}; \quad B = Q\frac{a}{l}.$$

Liegt die Last Q in der Mitte, so ist natürlich $A = B = \frac{1}{2}Q$; rückt dann die Last näher an das linke Auflager, so wird dieses mehr belastet, das andere weniger. Der Abstand l der beiden Auflagerdrücke ist die rechnungsmäfsige Spannweite des Balkens. Um die Formel $B = Q\,a/l$ ohne weiteres zu erkennen, denke man sich den Balken als Hebel mit dem Drehpunkte bei A und stellt sich die Kraft B als Hubkraft einer Hand vor, dann erscheint $a:l$ sofort als das Hebelverhältnis.

Fig. 215.



Eine Tür (Fig. 215) stützt sich drehbar auf zwei Zapfen. Das den Zapfen umschliefsende Türband berührt die Zylinderfläche und erfährt von dieser einen wagerechten Widerstand Y; es stützt sich aber auch auf die untere Verdickung des Zapfens und erfährt dort einen lotrechten Widerstand X. Daher treten an jedem Zapfen zwei unbekannte Kräfte auf. Wäre die Tür

nur bei B gehalten, so würde sie durch Q rechtsherum gedreht werden; dem mufs bei A ein nach links gerichteter Druck Y widerstehen. Nach der Gleichung der wagerechten Kräfte mufs bei B der gleiche Druck Y nach rechts wirken. Die Gleichung der lotrechten Kräfte verlangt $X + X_1 = Q$; weiteres ist über X und X_1 nicht zu finden: wie sich das Gewicht Q auf beide Zapfen verteilt, hängt von kleinen Zufälligkeiten der Ausführung ab. Y ist aber durch die Momentengleichung, etwa um B, leicht zu berechnen: $0 = Qb - Yh$, oder $Y - Qb:h$.

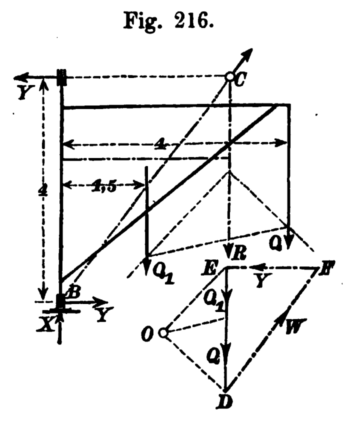
Bei näherer Besichtigung einer Tür wird man zuweilen finden, dafs an einem der beiden Zapfen das Türband mit der unteren Verdickung des Zapfens nicht in Berührung ist, dafs daselbst ein Spielraum, eine offene Fuge sich zeigt. An einer solchen Stelle findet dann auch keine Druckübertragung statt, und es wird das Gewicht Q der Tür in solchem Fall allein von dem anderen Zapfen getragen.

In wichtigen Fällen, d. h. wenn grofse Kräfte auftreten, ist eine derartige Unbestimmtheit der Kraftwirkung zu vermeiden. Daher trifft man dann die Einrichtung so, dafs die Kraft X nur an einer Unterstützungsstelle überhaupt auftreten kann, indem man an der anderen Stelle eine Berührung nur an der zylindrischen Fläche des Zapfens zuläfst; z. B. an dem Drehkrane (Fig. 216). Hier mufs (mit $Q = 3000$, $Q_1 = 2000^{kg}$) $X = Q + Q_1 = 5000^{kg}$, und in Bezug auf den unteren Stützpunkt B

$$0 = -Y \cdot 4 + 2000 \cdot 1{,}5 + 3000 \cdot 4,$$

mithin $Y = 3750^{kg}$ sein. Man kann die Aufgabe auch rein zeichnerisch lösen: Nach irgend einem Mafsstabe trägt man in einer Nebenfigur Q_1 und Q zu einem Krafteck aneinander, wählt einen beliebigen Pol O, zeichnet zu den Polstrahlen ein Seileck in der Hauptfigur, deren äufserste Seiten durch ihren Schnittpunkt die Lage des Gesamtgewichtes $R = 5000$ bestimmen. Mit dieser Kraft R müssen nun der wagerechte

Fig. 216.



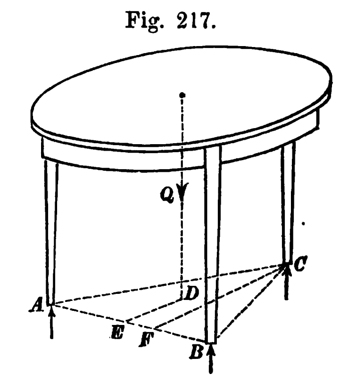
Widerstand Y des oberen Lagers und der schräge Gesamtwiderstand W des unteren Lagers im Gleichgewichte sein, sich also auf ihr schneiden. Der Schnitt C von Y und R bestimmt sonach die Richtung BC von W. Zieht man im Krafteck EF wagerecht, $DF \parallel BC$, so ist $DF = W$ und $FE = Y$.

6. Dreifach und mehrfach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Hat ein Körper drei feste Punkte, so läfst sich der Widerstand jedes der Punkte in je drei Seitenkräfte zerlegen; man hat also 9 Unbekannte. Die Zahl der Gleichgewichts-Bedingungen beträgt im allgemeinen 6 (S. 170), mithin fehlen 3 Gleichungen zur völligen Bestimmung der Kräfte, oder die Aufgabe ist dreifach statisch unbestimmt.

Ist aber der Körper ein nur lotrecht belasteter dreibeiniger Tisch oder Schemel, der sich an drei nicht in derselben Geraden liegenden Stellen auf eine wagerechte Ebene stützt, so sind von den drei Widerständen die Richtungen bekannt und nur die Gröfsen gesucht. Benutzt man die Lotrechte als z-Richtung, so sind von den 6 Gleichgewichts-Bedingungen (S. 170) benutzbar: Gl. 3, 4 und 5, und diese genügen zur Bestimmung der 3 Unbekannten; doch wendet man zur Ermittelung der Unbekannten vorteilhaft nur Momenten-Gleichungen an in Bezug auf Drehachsen durch je 2 Stützpunkte. Die lotrechten Widerstände A, B und C sind zn berechnen. Die Richtungslinie des Gewichtes Q des belasteten Tisches schneide die Unterstützungsebene in D (Fig. 217). Für die Achse AB gilt

Fig. 217.



$$0 = -C \cdot CF + Q \cdot DE, \text{ also}$$

$$1) \qquad C = Q \cdot \overline{DE} : \overline{CF}.$$

In entsprechender Weise findet man A und B.

Ist der Tisch nur einfach auf den Boden gestellt ohne Bindemittel und ohne Verklammerung, so können die Widerstände nicht negativ werden. Es wird aber $C = 0$, wenn $DE = 0$, d. h. wenn

Q durch die Seite AB des Unterstützungsdreiecks geht. Liegt D aufserhalb dieses Dreiecks, so ist Gleichgewicht nicht möglich, vielmehr kippt der Tisch dann um eine der Seiten des Dreiecks ABC.

Fällt D in den Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so wird $C = {}^1/_3 Q$, und ebenso grofs werden A und B, so dafs in diesem Falle das Gewicht sich gleichmäfsig auf die 3 Stützpunkte verteilt.

Tritt zu dem Gewichte Q noch eine wagerechte Kraft K (Fig. 218), so vermögen die lotrechten Widerstände nicht mehr, Gleichgewicht herbeizuführen, sondern es müssen an den Auflagerstellen noch wagerechte Widerstände hinzutreten. Diese werden in Wirklichkeit bis zu einem gewissen Grade durch die Reibung geliefert; wir wollen statt dessen hier annehmen, dafs eine vorgelegte Leiste die Verschiebung hindere. Es ist dann aufser dem Ruhezustande nur ein Kippen um die Leistenkante möglich.

Fig. 218.

Ersetzt man Q und K durch ihre Mittelkraft R, welche rechts von A im Abstand r vorbeigeht, so wird

$$Cc = Rr \quad \text{oder} \quad C = Rr : c.$$

Gleichgewicht ist nur möglich, solange r positiv ist, d. h. solange R innerhalb des Unterstützungsdreiecks durch die Grundebene hindurchgeht. Zugleich ist aber auch $Rr = Qa - Kh$. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, solange $Qa \geqq Kh$. Qa heifst das Standsicherheitsmoment (Stabilitätsmoment) in Bezug auf die Kante A, Kh das Umsturzmoment. Der Körper ist nur in gesichertem Gleichgewichte, solange das Standsicherheitsmoment gröfser als das Umsturzmoment.

Stützt sich ein Körper an mehr als drei Stellen auf eine wagerechte Ebene, so sind die Widerstände der Stützpunkte nicht mehr zu ermitteln. In geometrischer Beziehung ist dann die Ebene, in welcher der Körper die Unterstützungsfläche berührt, durch mehr als drei Punkte bestimmt, also überbestimmt, während, wenn die Unterstützungsstellen nicht genau eine Ebene bilden, ein Wackeln des Körpers bei Verschiebung der Last eintreten kann. Ein dreibeiniger Tisch kann nicht wackeln, ein mehrbeiniger aber bekanntlich sehr leicht; es hängt damit die Unbestimmtheit der Druckverteilung zusammen.

Bezüglich der Sicherheit gegen ein Umsturzmoment gilt für einen vierbeinigen Tisch das Gleiche wie für einen dreibeinigen.

Ruht ein Körper unter Einwirkung seines Gewichtes Q mittels ebener Fläche auf wagerechter Ebene (Fig. 219), so müssen die lotrecht aufwärts gerichteten Widerstände der Flächenteilchen eine Mittelkraft N liefern, die durch den Schwerpunkt S des Körpers geht. Nach welchem Gesetze sich aber N auf die Berührungsfläche verteilt, ist statisch unbestimmt. Da nun die Mittelkraft zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes nach S. 112 zwischen den Parallelkräften liegt, so kann auch die Mittelkraft N nur innerhalb des Bereiches der Grundfläche liegen, oder es ist für Gleichgewicht erforderlich, dafs die Schwerpunktslotrechte innerhalb des Bereiches der Grundfläche bleibe; andernfalls tritt ein Kippen um eine Drehkante ein, z. B. in Fig. 220 um A.

Fig. 219.

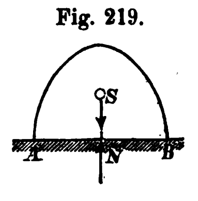
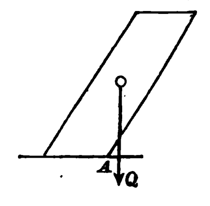
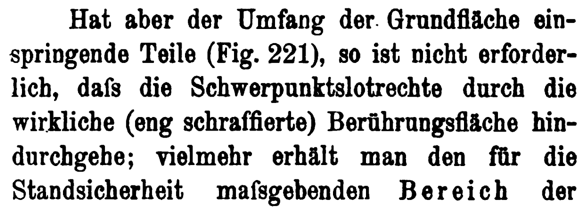


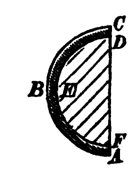
Fig. 220.





Hat aber der Umfang der Grundfläche einspringende Teile (Fig. 221), so ist nicht erforderlich, dafs die Schwerpunktslotrechte durch die wirkliche (eng schraffierte) Berührungsfläche hindurchgehe; vielmehr erhält man den für die Standsicherheit mafsgebenden Bereich der Grundfläche, indem man die wirkliche Berührungsfläche so weit ergänzt, dafs einspringende Winkel fortfallen. Denn eine Seite oder Tangente der Grundfläche kann nur dann zu einer Drehkante werden, wenn ihre Verlängerung die Berührungsfläche nicht mehr durchschneidet. Sämtliche Tangenten, die man an den einspringenden Bogen FED der Figur legt, sind keine möglichen Drehkanten. Es mufs daher die leicht schraffierte Halbkreisfläche FED mit zu dem Bereiche der Grundfläche gerechnet werden, aus dem die Schwerpunktslotrechte nicht hinaustreten darf. Der Bereich der Grundfläche ist diejenige ebene Fläche, welche umschlossen wird von einer beweglichen Geraden, die die Unterstützungsfläche umhüllt, d. h. sich so um dieselbe bewegt, dafs sie sie stets berührt, ohne sie aber zu schneiden.

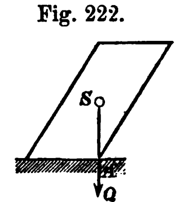
Fig. 221.



Bekanntlich kann ein zusammengebogenes Papier- oder Kartenblatt auf einem Tische sicher stehen, wiewohl die Schwerlinie nicht durch die schmale Auflagerfläche hindurch geht. Ebenso bildet bei dem Tische (Fig. 217, S. 188) die gesamte Dreieckfläche ABC den Bereich der Grundfläche.

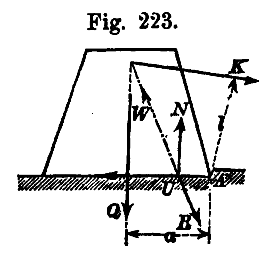
Geht die Schwerpunkts-Lotrechte gerade durch eine mögliche Drehkante (Fig. 222), so ist der Ruhezustand unsicher. Der Widerstand des Bodens verteilt sich nicht mehr über die Berührungsfläche, sondern wird nur noch von der Drehkante geleistet.

Fig. 222.



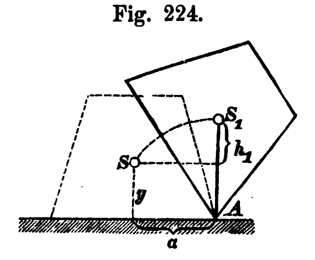
Tritt zu dem Gewicht Q des Körpers noch eine beliebig gerichtete Kraft K hinzu, die mit Q in derselben Ebene liegt (Fig. 223), so kann man die Mittelkraft R beider bestimmen, und letztere mufs durch den Widerstand W des Bodens aufgehoben werden, wenn der Körper in Ruhe bleiben soll. Die seitliche Verschiebung im Sinne der wagerechten Seitenkraft von K sei durch einen Vorsprung am Boden verhindert; dann kommt nur noch die Möglichkeit der Drehung um die Kante in Frage, deren Verschiebung durch den Vorsprung gehindert ist. Der Boden kann innerhalb des Bereiches der Grundfläche jeden beliebigen Normalwiderstand N leisten, der Vorsprung einen seitlichen Widerstand von beliebiger Gröfse; der aus beiden sich zusammensetzende Gesamtwiderstand W kann daher innerhalb des Bereiches der Grundfläche jede beliebige Gröfse und Richtung haben, kann aber nicht aus diesem Bereiche heraustreten. Es mufs daher die Lage von R die Unterstützungsebene gleichfalls im Bereiche der Grundfläche schneiden, wenn der Körper soll in Ruhe bleiben können. Ist der Hebelarm von Q in Bezug auf die Drehkante A (rechtwinklig zur Bildebene gedacht) wieder a, der der Kraft K aber l, so ist wieder Standsicherheit vorhanden, wenn $Qa > Kl$, d. h. wenn das Standsicherheitsmoment gröfser als das Umsturzmoment. Für $Kl = Qa$ geht die Mittelkraft R aus K und Q durch die Drehkante, und der Körper ist im unsicheren Gleichgewichte. Wird Kl im geringsten gröfser als Qa, so wird der Körper sich um die Kante A drehen.

Fig. 223.



Erfolgt diese Drehung, so beschreibt der Schwerpunkt S (Fig. 224) einen Kreisbogen um A, die Richtungslinie des Gewichtes Q rückt der Kante immer näher, das Moment von Q wird immer kleiner und endlich zu Null, sobald der Schwerpunkt in S_1 lotrecht über A liegt. Setzen wir voraus, die umstürzende Kraft K nehme in der Weise ab, dafs ihr Moment stets gleich dem Momente von Q in Bezug auf A sei, so wird das Moment ihrer Mittelkraft R stets Null sein, R also stets durch A gehen. Es wird dann ein langsames, allmähliches Aufkippen des Körpers möglich sein. Die hierzu von der Kraft K zu leistende Arbeit kann man leicht berechnen. Die Bewegung erfolge so langsam, dafs bei der höchsten Lage des Schwerpunktes die Geschwindigkeit aller Punkte des Körpers Null sei. Dann ist, von der sicheren Ruhelage aus gerechnet, die Zunahme an Arbeitsvermögen Null. Mithin mufs auch die Arbeitsumme Null sein. Nach S. 168 verrichten aber die inneren Kräfte die Arbeit Null, der in der Drehkante A auftretende Widerstand W verrichtet ebenfalls die Arbeit Null, weil sein Angriffspunkt sich nicht bewegt; mithin mufs die Arbeit von Q und K zusammen Null sein. Bei einer Hebung des Schwerpunktes um h_1 ist aber (nach S. 163) die Arbeit der Schwerkraft $-Qh_1$, folglich ist die zum völligen Aufkippen des Körpers erforderliche Arbeit

Fig. 224.



$$1)\qquad \mathfrak{A} = Q h_1 .$$

Diese Arbeit heifst die dynamische Standsicherheit, sie kommt in Frage, wenn es sich darum handelt, ob ein Körper durch einen Stofs oder Wurf umzustürzen ist. In einem geworfenen Körper steckt ein bestimmtes Arbeitsvermögen; trifft er einen aufgestellten Körper, so kann ein gewisser Teil des Arbeitsvermögens zum Umstürzen wirksam werden.

Das Standsicherheitsmoment war das zum ersten Anheben erforderliche Moment und unabhängig von der Höhenlage des Schwerpunktes. Die zum völligen Aufkippen erforderliche Arbeit $\mathfrak{A}$

aber ist auch von der Höhe y des Schwerpunktes abhängig. Es ist nämlich (Fig. 224)

$$AS = AS_1 = \sqrt{a^2 + y^2}; \quad h_1 = AS_1 - y = \sqrt{a^2 + y^2} - y,$$

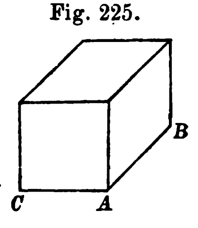
was man aber, wenn man mit $\sqrt{a^2 + y^2} + y$ multipliziert und dividiert, auch schreiben kann

$$h_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}, \text{ oder}$$

2) $$\mathfrak{A} = Q a \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}.$$

Man erkennt, dafs bei gleich bleibendem a die Arbeit $\mathfrak{A}$ um so kleiner wird, je höher der Schwerpunkt liegt. Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte lassen sich also durch einen Stofs verhältnismäfsig leicht umstürzen.

Fig. 225.

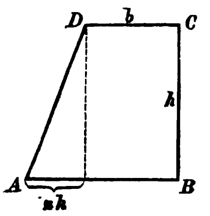


Beispiel: Ein parallelepipedischer Steinkörper (Fig. 225) von $1 \times 1 \times 2$ m wiegt, wenn $\gamma = 2000$ kg/cbm, $Q = 4000$ kg. Liegt er mit einer Langseite auf dem Boden, so ist $a = 0{,}5$ m, $y = 0{,}5$ m, daher das Moment zum ersten Aufkippen $\mathfrak{M} = Qa = 4000 \cdot 0{,}5 = 2000$ mkg. Oder es mufs unter der linksseitigen Steinkante eine Hubkraft $K = 2000$ kg wirksam sein. Die Arbeit zum völligen Aufkippen, so dafs er dann von selbst weiter umkippt, ist

$$\mathfrak{A} = Q a \frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} + 0{,}5} = \frac{2000}{\sqrt{2} + 1} = 2000 (\sqrt{2} - 1)$$
$$= 2000 \cdot 0{,}414 = 828 \text{ mkg}.$$

Steht aber der Körper hochkantig, so ist $a = 0{,}5$ m, $y = 1$ m, mithin $\mathfrak{M}$ ebenso grofs wie vorher, dagegen $\mathfrak{A} = Q a (\sqrt{1 + 4} - 2) = 2000 \cdot 0{,}236 = 472$ mkg, also erheblich kleiner.

Fig. 226.



Eine Mauer von trapezförmigem Querschnitte (Fig. 226) habe eine Höhe h, eine obere Breite b; der Grundrifs der geneigten Seite AD betrage nh; dann setzt sich das Standsicherheitsmoment aus den Beiträgen des rechteckigen und des dreieckigen Teiles zusammen, in welche man den Querschnitt zerlegen kann. Für eine

Länge = 1 rechtwinklig zur Zeichenebene ist dann in Bezug auf die Kante A das Standsicherheitsmoment $\mathfrak{M}_a$:

$$\mathfrak{M}_a = \gamma h \left\{ b\,(^1\!/_2 b + n h) + {}^1\!/_2 n h \cdot {}^2\!/_3 n h \right\}$$
$$= \gamma h \left\{ {}^1\!/_2 b^2 + b n h + {}^1\!/_3 n^2 h^2 \right\}.$$

In Bezug auf die Kante B:

$$\mathfrak{M}_b = \gamma h \left\{ {}^1\!/_2 b^2 + {}^1\!/_2 n h\,(b + {}^1\!/_3 n h) \right\}$$
$$= \gamma h \left\{ {}^1\!/_2 b^2 + {}^1\!/_2 b n h + {}^1\!/_6 n^2 h^2 \right\},$$

mithin $\mathfrak{M}_a > \mathfrak{M}_b$, weil der Gesamtschwerpunkt näher an B als an A liegt. Würde man das Trapez mit einem flächengleichen Rechtecke von der Höhe h und der Breite $b + {}^1\!/_2 n h$ vertauschen, so betrüge das Standsicherheitsmoment nur

$$\mathfrak{M} = \gamma h\, {}^1\!/_2 (b + {}^1\!/_2 n h)^2$$
$$= \gamma h \left\{ {}^1\!/_2 b^2 + {}^1\!/_2 b n h + {}^1\!/_8 n^2 h^2 \right\},$$

also wiederum weniger als $\mathfrak{M}_b$.

7. Gleichgewicht einer Verbindung von Gelenkstangen.

Unter einer Gelenkstange verstehen wir einen starren Körper, der an zwei Stellen mit sog. Augen versehen ist, in welchen zylindrische, einander parallele Bolzen angebracht sind. Mittels dieser Bolzen sind die Körper miteinander, bezw. mit festen, unbeweglichen Widerlagern derartig verbunden, dafs in den Gelenken nur Kräfte auftreten können, welche durch die Achsen der Gelenkbolzen hindurch gehen und zu diesen rechtwinklig stehen. Die Form der Körper ist im übrigen gleichgültig, dieselben können die Gestalt von geraden oder einfach gekrümmten Stäben haben; der Einfachheit wegen mögen sie geradlinig gezeichnet werden. Die Reibung an den Bolzen wird vernachlässigt.

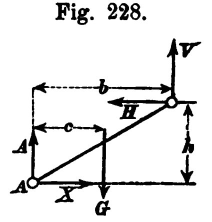
Verbindung zweier Gelenkstäbe. In A und B (Fig. 227) seien die Stäbe mit Widerlagergelenken verbunden, bei C greifen sie gelenkartig ineinander. G und G_1 seien die Gesamtlasten der linken bezw. rechten Stange mit den wagerechten Abständen c und c_1 von A bezw. B. Es seien b und b_1 die wagerechten, h und h_1 die senkrechten Projektionen der Stangen. Den Widerstand W

Fig. 227.

des Widerlagergelenkes A zerlegen wir in zwei Seitenkräfte A (senkrecht) und X (wagerecht); ebenso den Widerstand W_1 des Gelenkes B in B bezw. X_1, während die gegenseitige Kraft D, welche die Gelenkstangen bei C aufeinander ausüben, in V (senkrecht) und H (wagerecht) zerfallen möge.

Soll die Verbindung im Gleichgewichte sein, so mufs jede Stange für sich den Gleichgewichtsbedingungen genügen. Da nun für Kräfte in einer Ebene 3 Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen sind, so stehen im ganzen 6 Gleichungen zur Verfügung, mittels deren die Unbekannten A, X, B, X_1, H und V bestimmt werden können.

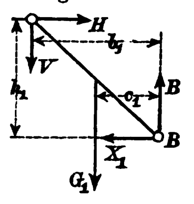
Fig. 228.



Zuerst sollen die gegenseitigen Kräfte im Gelenke C berechnet werden. Das an der linksseitigen Stange die Kraft H nach links wirken mufs, erkennt man leicht; der Sinn von V ist vorläufig unbestimmt; wir nehmen ihn nach oben an. Bei der Momentengleichung in Bezug auf A (Fig. 228) fallen A und X aus, und man erhält einfach: $0 = -Hh - Vb + Gc$. An der rechtsseitigen Stange (Fig. 229) müssen H und V entgegengesetzt angebracht werden, und man erhält:

$$0 = Hh_1 - Vb_1 - G_1 c_1.$$

Fig. 229.



Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\text{1)} \qquad H = \frac{Gcb_1 + G_1 c_1 b}{bh_1 + b_1 h}$$

$$\text{2)} \qquad V = \frac{Gch_1 - G_1 c_1 h}{bh_1 + b_1 h}.$$

Wird hierbei V negativ, so ist es in Fig. 228 abwärts, in Fig. 229 aufwärts gerichtet.

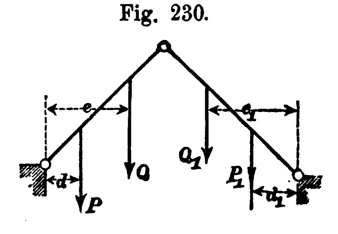
Weiter folgt dann leicht an der linken Stange:

3) $\qquad A = G - V; \quad X = H;$

an der rechten:

4) $\qquad B = G_1 + V; \quad X_1 = H.$

Fig. 230.



Wirken aber an jeder Stange zwei Lasten P und Q bezw. P_1 und Q_1 (Fig. 230), so kann man P und Q durch ihre Mittelkraft G, ebenso P_1 und Q_1 durch ihre Mittelkraft G_1 ersetzen, u. zw. ist dann einfach

$$Gc = Pd + Qe; \quad G_1 c_1 = P_1 d_1 + Q_1 e_1.$$

Führt man dies in die Gl. 1 und 2 ein, so entsteht:

$$5)\qquad H = \frac{P d b_1 + Q e b_1 + P_1 d_1 b + Q_1 e_1 b}{b h_1 + b_1 h} \text{ und}$$

$$6)\qquad V = \frac{P d h_1 + Q e h_1 - P_1 d_1 h - Q_1 e_1 h}{b h_1 + b_1 h}.$$

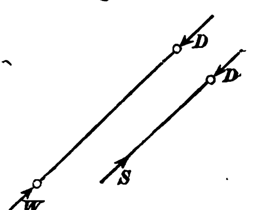
In diesen Gleichungen ist jede der 4 Lasten durch ein besonderes, von den anderen unabhängiges Glied vertreten; fallen z. B. die Lasten Q, Q_1 und P_1 fort, bleibt also nur P, so wird

$$H = \frac{P d b_1}{b h_1 + b_1 h}; \quad V = \frac{P d h_1}{b h_1 + b_1 h}.$$

Jede der Lasten liefert hiernach zu den Kräften H und V ihren bestimmten, unabhängigen Beitrag; man kann daher beim gleichzeitigen Vorhandensein beliebig vieler Lasten den Einflufs jeder einzelnen Last auf H und V besonders ermitteln und braucht die einzelnen Beträge dann nur mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen zu summieren. Das eigene Gewicht der Stangen wird ebenso wie jede Last behandelt; man kann daher die Stangen als an und für sich gewichtlos betrachten.

Eine unbelastete und gewichtlos gedachte Gelenkstange hat aber Eigenschaften, die für die Berechnung der Stangenverbindungen sehr wichtig sind (A. Ritter, Technische Mechanik). An einer solchen Stange müssen die Gelenkdrücke W und D sich allein im Gleichgewichte halten, also gleich und entgegengesetzt sein und in dieselbe Gerade fallen (Fig. 231), d. h. in die gerade Verbindungslinie beider Gelenke. Oder es gilt der Satz:

Fig. 231.



Eine gewichtlose unbelastete Gelenkstange kann nur Widerstände in der Richtung der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke ausüben.

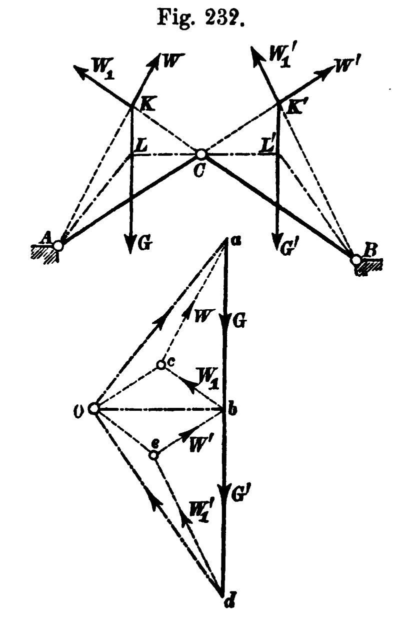
Sind die Pfeilspitzen der an beiden Gelenken auftretenden Kräfte einander zugewandt, wie in Fig. 231, so erfährt die Stange Druck. Denken wir uns die Stange an irgend einer Stelle zwischen den Gelenken durchschnitten, so haben wir an der Schnittstelle eine innere Spannkraft S anzubringen, welche die Wirkung des

abgeschnittenen Stückes ersetzt; diese Spannkraft ist ebenfalls $= D$ und ihr entgegengesetzt, oder:

Die Spannkraft einer unbelasteten Stange fällt in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte.

Ist nun (Fig. 232) die linke der beiden Stangen mit G belastet, die rechte einstweilen unbelastet (man betrachte G' einstweilen als nicht vorhanden), so übt letztere einen Gegendruck $D = W_1$ in der Richtung BC, welche sich mit G im Punkte K schneidet; durch K muſs dann auch der Widerstand W des Gelenkes A hindurchgehen, weil an der Stange AC die drei Kräfte: D, G und W sich im Gleichgewichte halten müssen. Nachdem hierdurch die Richtungen von W und W_1 gefunden sind, läſst sich leicht ein Krafteck abc dieser drei Kräfte zeichnen, aus welchen dann die Gröſsen W und $D = W_1$ abgegriffen werden können.

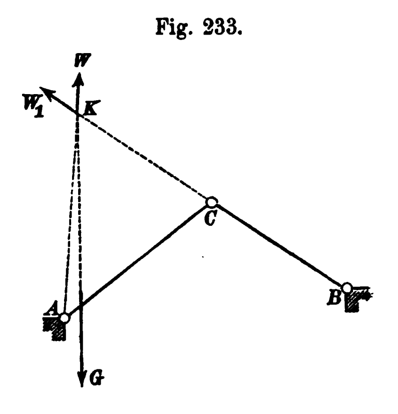
Fig. 232.



Für eine Belastung der rechten Stange mit G' findet man in entsprechender Weise die zugehörigen Widerstände W' und W_1' im Krafteck bde. Sind nun die Lasten G und G' gleichzeitig vorhanden, so treten auch die entsprechenden Widerstände gleichzeitig auf. Der Gesamtwiderstand im Punkt A ist dann die Mittelkraft aus W und W'. Diese ist aber leicht zu finden, wenn man aus bc und eb ein Parallelogramm $Ocbe$ zeichnet; dann finden sich $Oc = W'$ und $ca = W$ aneinander gereiht, und ihre geometrische Summe Oa ist der Gesamtdruck W_a in A. Ebenso ist dO der Gesamtdruck W_b in B. Bringt man diese Gesamtkräfte in A und B an, so schneiden sie G und G' in Punkten L und L', durch welche auch der Gesamtdruck des Gelenkes C hindurch gehen muſs, die deshalb mit C in einer Geraden liegen müssen, und zwar muſs diese Gerade $LCL' \parallel Ob$ sein, weil Ob den Gesamtdruck des Gelenkes C nach Richtung und Gröſse darstellt.

Rückt die Last G (Fig. 233) dem Widerlagergelenk A näher und näher, so verschiebt sich der Schnittpunkt K der drei Kräfte auf der Verlängerung von BC mehr und mehr nach oben, und die Richtung von W nähert sich mehr und mehr der Lotrechten. Im Grenzfalle, wo G mit A zusammenfällt, wird W lotrecht, fällt also mit G in dieselbe Richtung; aus diesem Grunde wird die dritte Kraft $D = W_1$ (nach S. 63) = Null; die Last G wird unmittelbar von dem festen Gelenkpunkt A auf das Widerlager übertragen; im Gelenke C tritt gar keine Kraft auf, und die Stangenverbindung bleibt ohne innere Spannkräfte. Also:

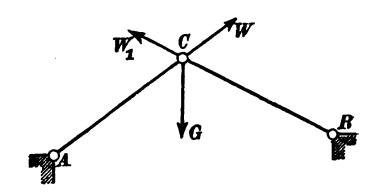
Fig. 233.



E i n e L a s t, d i e a n e i n e m W i d e r l a g e r g e l e n k p u n k t e i n e r S t a n g e n v e r b i n d u n g a n g r e i f t, b r i n g t i n d e r S t a n g e n v e r b i n d u n g s e l b s t k e i n e S p a n n k r ä f t e h e r v o r.

Rückt aber die Last G der linken Stange nach C hin (Fig. 234), so nähert sich der Punkt K mehr und mehr dem Punkte C und fällt mit ihm zusammen, wenn die Last durch C geht. Denkt man sich nun die Stangen durchschnitten, so müssen ihre Spannkräfte beide in die Richtungen AC und BC fallen. Oder:

Fig. 234.



G r e i f e n d i e L a s t e n n u r i n d e m g e m e i n s a m e n G e l e n k p u n k t e i n e r S t a n g e n v e r b i n d u n g a n, s o f a l l e n d i e S p a n n k r ä f t e d e r S t a n g e n i n d i e V e r b i n d u n g s g e r a d e n d e r G e l e n k p u n k t e (die Stangenrichtungen).

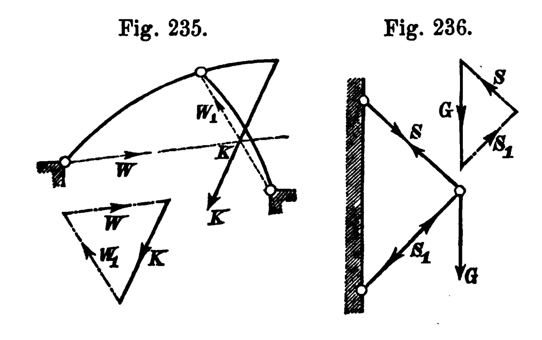
Die beiden vorstehenden Sätze gelten, wie man leicht erkennt, auch für eine Verbindung von beliebig vielen Stangen.

Die Bestimmung der Widerstände der festen Gelenke geschieht in derselben Weise, wie auf S. 197 beschrieben, wenn auch die

einzige vorhandene Last K an der **Verlängerung** einer Gelenkstange angreift und etwa von der lotrechten Richtung abweicht (Fig. 235).

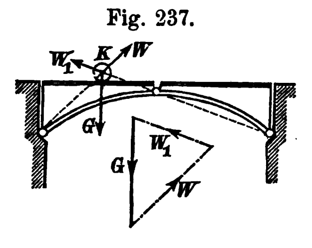
In Fig. 236 ergeben sich leicht die Spannkräfte S und S_1 der beiden Gelenkstangen, und zwar wirkt die Spannkraft S auf Zug, S_1 auf Druck.

Fig. 235. Fig. 236.



Ist bei einem Bogenträger mit drei Gelenken (Fig. 237) nur die linke Hälfte durch eine Einzellast G belastet, so kann, ohne Rücksicht auf die Form, die rechte Hälfte wie eine gewichtlose Stange behandelt werden, so daſs die Richtungen der Widerlagerdrücke W und W_1 in einfacher Weise bestimmt sind und daher die Zeichnung des Kraftecks aus G, W und W_1 ermöglicht ist.

Fig. 237.



Liegt das gemeinsame Gelenk C **oberhalb** der Geraden AB, so erfordert eine Last G (Fig. 234, S. 198) schräg aufwärts gerichtete Widerstände W und W_1; diese Kräfte haben nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Bestreben, die Widerlager schräg nach unten und auseinander zu drängen; die Stangen erfahren **Druckkräfte**. Liegt aber C **unterhalb** AB (Fig. 238), so verkehren sich alle Verhältnisse ins Entgegengesetzte: die Stangen werden gezogen und suchen die Widerlager nach **innen** zu ziehen.

Fig. 238.

Solche innere Zugkräfte, deren Richtung mit der Verbindungsgeraden zweier Gelenke zusammenfällt, können auch durch ein **Seil** aufgenommen werden. An Stelle der Gelenke hat man sich dann Seilknoten zu denken.

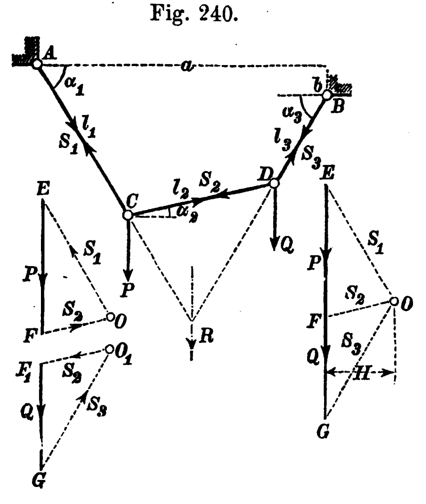
Verbindung von mehr als zwei Stangen. Eine Verbindung von zwei Gelenkstangen wie Fig. 238 bildet eine bestimmte Figur,

nämlich ein durch drei Seiten bestimmtes Dreieck ABC, weil die festen Punkte A und B die Seite AB festlegen. Eine Verbindung von mehr als zwei Stangen bildet aber eine veränderliche Figur, weil ein Vieleck von mehr als drei Seiten nicht mehr durch die Seiten allein bestimmt ist. Sind die Längen der Stangen, deren Lasten und die Widerlagergelenkpunkte A und B gegeben, so gibt es nur eine gesicherte Gleichgewichtslage, welche sich allmählich von selbst einstellt, wenn man die Stangenverbindung der Wirkung der Lasten überläfst. Diese Ruhelage mufs zunächst ermittelt werden, bevor man die Widerstände der Befestigungspunkte und die Spannkräfte der Stangen bestimmen kann.

Fig. 239.

Betrachten wir eine Verbindung von drei Stangen, so sind deren Neigungswinkel α_1, α_2, α_3 in der Gleichgewichtslage unbekannt. Greifen die Lasten irgendwo zwischen den Gelenkpunkten an, so ist es zur Vereinfachung empfehlenswert, jede Last G durch zwei parallele Seitenkräfte K zu ersetzen, die je in einem Gelenk angreifen. Es ist dann (Fig. 239) $K_1 = G_1\left(1 - \frac{c_1}{l_1}\right)$; $K_1' = G_1 \frac{c_1}{l_1}$. Verfährt man mit den Lasten der anderen Stangen ebenso, so werden die auf die Widerlagergelenke entfallenden Seitenkräfte, z. B. K_1, unmittelbar von diesen aufgenommen und kommen für das Gleichgewicht der Stangenverbindung nicht weiter in Betracht. An jedem Zwischengelenk aber summieren sich die von links und rechts herrührenden Seitenkräfte und geben zusammen die Gelenkpunktlast. Wir haben dann nur mit Gelenkpunktlasten P und Q zu tun (Fig. 240), und die Spannkräfte der Stäbe können nach dieser Änderung mit Rücksicht auf den Satz S. 198 als in die Stabrichtungen fallend angesehen werden.

Fig. 240.



An dem Gelenkbolzen C hängt die Last P; die anschliefsenden Stäbe üben auf ihn die Kräfte S_1 und S_2 aus, und diese 3 Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten, weil der Bolzen in Ruhe sein soll. Es müssen daher diese Kräfte ein geschlossenes Krafteck OEF bilden (Fig. 240, links). Da nun S_1 mit der Wagerechten den Winkel α_1 bildet, ist $90^0 - \alpha_1$ der Winkel FEO zwischen S_1 und P; der Winkel bei O im Krafteck beträgt aber für die angenommenen Neigungen $\alpha_1 + \alpha_2$, derjenige bei F ist $90^0 - \alpha_2$. Mithin wird nach dem Sinus-Satze:

$$P : S_2 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) : \cos\alpha_1 .$$

Ebenso müssen die in D angreifenden Kräfte S_2, Q und S_3 ein geschlossenes Dreieck $O_1 F_1 G$ bilden, für welches die Gleichung gilt:

$$Q : S_2 = \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \cos\alpha_3 .$$

Durch Division ergeben diese beiden Gleichungen:

$$1) \qquad \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1} = \frac{P}{Q}.$$

Dies ist die einzige Beziehung, welche zwischen den gegebenen Lasten und den Gleichgewichts-Neigungen α_1, α_2 und α_3 aufgestellt werden kann. Haben aber die Punkte A und B einen gegebenen wagerechten Abstand a, einen Höhenunterschied b, so müssen diese Werte gleich sein der algebraischen Summe der wagerechten bezw. senkrechten Projektionen der Stangen, oder

$$2) \qquad l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2 + l_3 \cos\alpha_3 = a;$$

$$3) \qquad l_1 \sin\alpha_1 - l_2 \sin\alpha_2 - l_3 \sin\alpha_3 = b.$$

Die Gleichungen 1 bis 3 enthalten die Bedingungen für die 3 Unbekannten α_1, α_2 und α_3, sind aber nach diesen Gröfsen nur durch mühsames Probieren auflösbar.

In anderer Gestalt läfst sich die Bedingung für die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung aussprechen, wenn man die beiden Kraftecke so zusammenschiebt, dafs $O_1 F_1$ mit OF zusammenfällt. In der so entstehenden Figur (Fig. 240, rechts) bildet EFG den Streckenzug der gegebenen parallelen Lasten, O den Pol, OE, OF, OG die Polstrahlen, und, wenn man nun bedenkt, dafs $OE \parallel AC$, $OF \parallel CD$ und $OG \parallel DB$ gezeichnet waren, so ist der Linienzug $ACDB$ ein zu den Lasten P und Q gezeichnetes Seileck. Die Polstrahlen des Kraftecks geben Gröfse und Richtung der Stab-Spannkräfte.

Nach der Bedeutung der Seileckseiten ist DB die Richtungslinie einer Kraft S_3 mit dem Sinne von B nach D, welche die Mittelkraft von S_1 (aufwärts), P und Q darstellt. Nach den Lehren über die Zusammensetzung und das Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper würden daher die an einem starren Körper wirkenden Kräfte S_1, P und Q mittels eines Seilecks zu einer Mittelkraft S_3 vereinigt werden können; und eine entgegengesetzt gerichtete Kraft S_3 (mit dem Sinne von D nach B) würde den Kräften S_1, P und Q das Gleichgewicht halten. Bei der Stangenverbindung haben wir nun gezeigt, dafs sie unter Einwirkung der Stabkräfte S_1 und S_3 und den Gelenkpunktlasten P und Q im Gleichgewichte sei. Da sich dieselben Kräfte auch am starren Körper im Gleichgewichte halten, so folgt daraus, dafs, wenn eine Gelenkverbindung im Gleichgewicht ist, in dem Gleichgewichts- und Kräftezustande nichts geändert wird, wenn man den Gelenken die Beweglichkeit nimmt, also z. B. sie zu einem starren Körper zusammengeschweifst denkt.

Nach der Eigenschaft des Seilecks schneiden sich die Richtungen von S_1 und S_3 auf der Mittelkraft R der Lasten P und Q. Die Spannkräfte S_1, S_2 und S_3 haben im Krafteck übereinstimmende wagerechte Projektion, d. h. übereinstimmende wagerechte Seitenkraft H, gemessen durch den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie EFG.

Man erkennt leicht, dafs das vorstehend für drei Stangen entwickelte im wesentlichen auch für beliebig viele, nur in den Gelenkpunkten belastete Stangen gilt; wir fassen dies unter Annahme reibungsloser Gelenke zu folgenden Sätzen zusammen:

1. Die Spannkraft einer jeden Stange fällt mit ihrer Richtung, d. h. mit der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke zusammen.

2. An jedem Gelenkpunkte halten die Spannkräfte der beiden benachbarten Stangen der Last des Gelenkpunktes das Gleichgewicht.

3. Die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung ist ein zu den Lasten gezeichnetes Seileck.

4. Die Spannkräfte irgend zweier Stangen halten den an den zwischenliegenden Gelenkpunkten angreifenden Lasten das Gleichgewicht (d. h. genügen den Bedingungen für das Gleichgewicht starrer Körper). Die Mittelkraft dieser Lasten geht durch den Schnittpunkt der beiden Spannkräfte.

Die vorstehenden Sätze gelten auch, wenn die Gelenkpunktslasten nicht lotrecht, sondern beliebig gerichtet sind. Werden die Lasten aber ausschliefslich durch lotrechte Kräfte gebildet, so ist noch

5. die wagerechte Seitenkraft aller Spannkräfte von der gleichen Gröfse H.

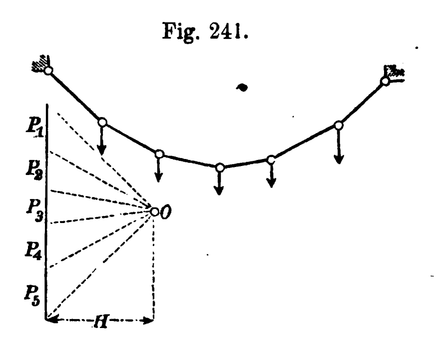
Sind nun n Stangen der Längen $l_1, l_2 \ldots l_n$ und $n-1$ Gelenklasten gegeben, so kann man damit unendlich viele Gleichgewichtsformen herstellen. Bei drei Stangen liefs sich aus den Gleichgewichtsbedingungen nur eine Gleichung (Gl. 1, S. 201) mit den drei Unbekannten α_1, α_2, α_3 entwickeln; die beiden anderen Gleichungen waren geometrische Bedingungen. Ähnlich ist es auch bei n Stangen: Sind die Abstände a und b der Befestigungspunkte in wagerechtem und lotrechtem Sinne gegeben, so lassen sich aufser den geometrischen Bedingungen nach Art der Gl. 2 u. 3, S. 201, in derselben Weise wie bei drei Stangen noch $n-2$ Gleichgewichtsbedingungen herleiten. Die Auflösung der Gleichungen nach den unbekannten Winkeln α_1, $\alpha_2 \ldots$ ist aber nur durch umständliches Probieren möglich. Viel leichter wird die Aufgabe, wenn statt der gegenseitigen Lage der Befestigungspunkte zwei andere Stücke gegeben sind. Die Neigungswinkel α sind sofort bestimmt, wenn im Krafteck (Fig. 240, rechts, S. 200) die Lage des Poles gegen den Streckenzug der Lasten gegeben ist. Sind also von irgend einer Spannkraft, z. B. von S_1, wagerechte und senkrechte Seitenkraft gegeben, so steht S_1 nach Gröfse und Richtung fest und bestimmt damit den Pol O. Auch die Neigungen zweier Stäbe (d. h. ihrer Spannkräfte) legen den Schnittpunkt der beiden Polstrahlen, d. h. den Pol fest.

In Fig. 240 können die Spannkräfte S_1, S_2, S_3 der Gelenkstangen ebenso gut durch Seilstücke aufgenommen werden. Ein Seil kann wegen seiner Biegsamkeit nur eine in seine Längenrichtung fallende Zugkraft aufnehmen (vergl. S. 64). Das zwischen zwei Knoten befindliche Stück eines gewichtlosen Seiles hat daher dieselbe Grundeigenschaft wie eine gewichtlose und unbelastete Gelenkstange, jedoch mit der noch hinzutretenden Beschränkung, dafs im Seile nur Zugkräfte möglich sind. Das Viereck $ACDB$ ist also die Gleichgewichtsform einer in den Knoten C und D belasteten Seilverbindung. Hiermit erklärt sich die S. 103 (nach dem Vorschlage von G. Lang) eingeführte Bezeichnung Seileck.

Würde im Krafteck (Fig. 240, rechts) der Pol O nach der linken Seite von EG symmetrisch verlegt, so erhielten S_1, S_2 und S_3 dieselben Gröfsen wie bisher, S_1 würde dann aber im Seileck von A aus nach rechts ansteigen mit dem Ansteigungswinkel α_1, gegen die Wagerechte. Das in solcher Weise zu den Lasten P und Q erhaltene Seileck würde eine Figur sein, in welcher die Knickpunkte C und D oberhalb AB liegen; S_1, S_2, S_3 würden wie in Fig. 234 (S. 198) Druckkräfte werden. Diese Figur ist als Gleichgewichtsform eines Seiles nicht möglich, gleichwohl hat man den Namen Seileck auch für solche Fälle beibehalten, während man eigentlich richtiger Gelenkvieleck sagen würde. Ein solches Gelenkvieleck aus mehr als zwei Gelenkstangen mit hochliegenden Zwischengelenken (nach oben gekehrten Knien), in welchen durch abwärts gerichtete Lasten Druckkräfte entstehen, ist nur in unsicherem Gleichgewichte, kann nur künstlich gehalten werden und gerät bei der geringsten Veränderung in beschleunigte Abwärtsbewegung; in Bezug auf die Ermittelung der Gleichgewichtsform und der entsprechenden Kräfte ist sonst kein Unterschied zwischen der unsicheren und der sicheren Gleichgewichtsform, ebensowenig wie zwischen Fig. 234 und 238.

Beispiel: Sechs Stangen mögen die Längen: $l_1 = 0{,}98^{\text{m}}$; $l_2 = 0{,}87^{\text{m}}$; $l_3 = 0{,}84^{\text{m}}$; $l_4 = 0{,}69^{\text{m}}$; $l_5 = 1{,}01^{\text{m}}$; $l_6 = 0{,}86^{\text{m}}$ haben; die Lasten seien $P_1 = 62^{\text{kg}}$; $P_2 = 54^{\text{kg}}$; $P_3 = 44^{\text{kg}}$; $P_4 = 60^{\text{kg}}$; $P_5 = 62^{\text{kg}}$. Die äufsersten Seiten des Seilecks mögen je unter 45° gegen die Wagerechte geneigt sein. Trägt man die Lasten zu einem Streckenzuge zusammen (im Mafsstabe $1^{\text{mm}} = 10^{\text{kg}}$) (Fig. 241), so wird die Gesamtlast 282^{kg}, und weil die äufsersten Strahlen davon je um 45° abweichen, so ist der Polabstand $H = \frac{1}{2} \Sigma P = 141^{\text{kg}}$ die wagerechte Kraft, die durch die ganze Verbindung hindurchgeht. Die Stäbe sind der Reihe nach parallel den Polstrahlen in den gegebenen Längen (im Mafsstab 1 : 100) aufgetragen. Die Längen der Polstrahlen geben die Gröfse der Spannkräfte der entsprechenden Stäbe.

Fig. 241.

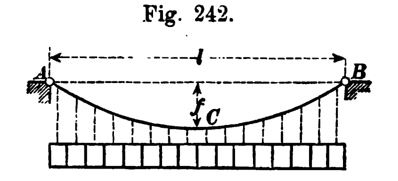


8. Kettenlinien.

Wird die Zahl der Gelenkstangen immer gröfser, ihre Länge immer kleiner, so nähert sich die vieleckige Gleichgewichts-Figur mehr und mehr einer stetig gekrümmten Kurve. Immer aber bleiben dieselben Gesetze gültig: namentlich also fällt die Richtung der Spannkraft einer Stange mit der Richtung der Stange zusammen. Werden die einzelnen Stangen unendlich klein, so kommt man zu einer an jeder Stelle völlig biegsamen Kette oder einem biegsamen Faden mit stetiger Belastung. Die Spannkraft an irgend einer Stelle ist dann tangential gerichtet. Die Belastung der einzelnen Bogenteilchen der Kette kann überall gleich oder verschieden sein; danach wird die Gleichgewichtsform der Kette, die **Kettenlinie**, eine verschiedene.

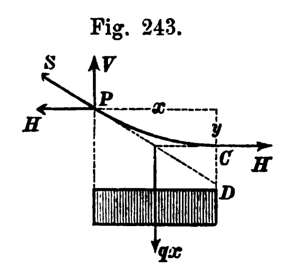
Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dafs die Belastung sich gleichförmig über die wagerechte Projektion der Kette verteile, dafs also jede Längeneinheit (jedes Meter) dieser Projektion ein bestimmtes Gewicht q zu tragen habe. Dies können wir uns vorstellen durch einen prismatischen Belastungskörper mit dem Gewichte q für die Längeneinheit, der durch lotrechte Schnitte in unendlich viele Scheiben geschnitten ist, welche mittels gewichtloser Fäden oder Hängestangen an der selbst gewichtlosen Kette aufgehängt sind (Fig. 242).

Fig. 242.



Im tiefsten Punkte C ist die Kette und daher auch die Spannkraft H dieser Stelle wagerecht gerichtet. Durchschneiden wir die Kette nochmals in einem wagerechten Abstand x von C, so ist hier, bei P (Fig. 243) eine Spannkraft S anzubringen. Die Kräfte S und H müssen nun (nach S. 202, 4) den zwischenliegenden Lasten das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft dieser Lasten ist qx mit dem Abstand $\frac{1}{2}x$ von P. Die Momentengleichung in Bezug auf P liefert dann: $0 = -Hy + \frac{1}{2}qx^2$, also:

Fig. 243.



1) $$y = \frac{qx^2}{2H} \quad \text{oder} \quad x^2 = 2\left(\frac{H}{q}\right)y.$$

Die Gleichgewichtsform der Kette ist also eine Parabel mit lotrechter Achse und vom Parameter $H:q$.

Für $x = {}^1/_2\, l$ wird $y = f$, daher nach Gl. 1:

2) $$f = \frac{q\, l^2}{8\, H};$$

durch Division beider Gleichungen entsteht dann:

3) $$\frac{y}{f} = \frac{4\, x^2}{l^2}.$$

Bemerkenswert ist auch, daſs der Schnitt der 3 Kräfte S, H und qx in der Mitte der Strecke x liegt, so daſs wenn man die Richtung der Tangente S bis zur Lotrechten durch C verlängert, der hier entstehende Schnittpunkt D in der Tiefe y unter C, d. h in der Tiefe $2\,y$ unter P liegt. Dies ist eine kennzeichnende Eigenschaft der Parabel.

Die wagerechte Seitenkraft oder Projektion von S ist $= H$, die lotrechte $V = q\,x$.

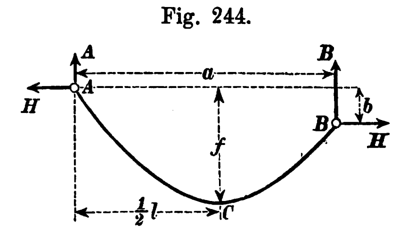
Zu einer gegebenen Last q sind unendlich viele parabolische Kettenlinien möglich, je nachdem H gröſser oder kleiner gewählt wird. Es läſst sich diese bestimmende Gröſse aber auf die Pfeilhöhe f der Parabel zurückführen; denn aus Gl. 2 folgt:

4) $$H = \frac{q\, l^2}{8\, f}.$$

Vergröſserung von H bedingt also Verkleinerung der Pfeilhöhe f, und umgekehrt. Der Parameter $\frac{H}{q}$ kann also auch $\frac{l^2}{8f}$ geschrieben werden.

Liegen die Befestigungspunkte A und B in einem wagerechten Abstand a, befindet sich aber B um b tiefer als A, so liegt der tiefste Punkt C nicht in der Mitte (Fig. 244). Seine wagerechte Entfernung ${}^1/_2\, l$ von A soll berechnet werden. Die Widerstände A und H bei A und die Spannkraft H bei C müssen den Lasten zwischen A und C das Gleichgewicht halten, d. h. $A = {}^1/_2\, q\, l$; $H f = {}^1/_8\, q\, l^2$ also $H = \frac{q\, l^2}{8\, f}$. Entsprechendes gilt für das Stück rechts von C, wo statt ${}^1/_2\, l$ zu setzen ist $a - {}^1/_2\, l$, statt f aber $f - b$. Mithin $H = \frac{q}{8}\, \frac{(2\,a - l)^2}{f - b}$.

Fig. 244.



Die beiden Werte H sind aber, wie bei jeder lotrecht belasteten Stangenverbindung, dieselben, mithin

$$\frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{f-b}{f} = 1 - \frac{b}{f}$$

$$\text{oder} \quad \frac{b}{f} = 1 - \frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{-4a^2+4al}{l^2}.$$

Weil aber $f = \frac{ql^2}{8H}$, so wird $\frac{b}{f} = \frac{8bH}{ql^2} = \frac{4al-4a^2}{l^2}$

$$\text{oder} \quad a(l-a) = \frac{2bH}{q}$$

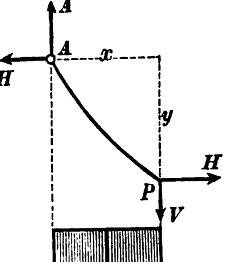
$$\text{und} \quad l = a + \frac{2b}{a}\frac{H}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{a}\frac{H}{q}.$$

Wichtig ist auch die Gleichung der parabolischen Kettenlinie, bezogen auf den Anfangspunkt A. Man kann dieselbe entwickeln, indem man von der Gl. 1 (S. 205) ausgeht, kann sie aber ebenso leicht unmittelbar ableiten: Im Punkt A (Fig. 242 und 245) wirken die Widerstände $A = \frac{1}{2}ql$ und $H = \frac{ql^2}{8f}$, und in Bezug auf den Punkt P (Fig. 245) gilt die Momentengleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2}qlx - Hy - \tfrac{1}{2}qx^2, \text{ oder}$$

$$5) \qquad y = \frac{q}{2H}x(l-x) = \frac{4f}{l^2}x(l-x).$$

Fig 245.



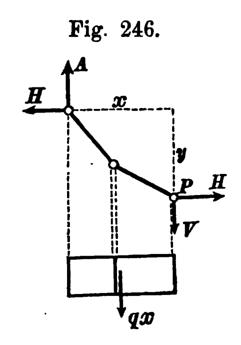
Dies ist also eine andere Form der Gleichung einer Parabel vom Parameter $\frac{H}{q} = \frac{l^2}{8f}$.

Auch künftig werden wir öfter auf eine Gleichung der Form $y = Cx(l-x)$ kommen; diese bedeutet stets eine Parabel vom Parameter $\frac{1}{2C}$, deren Achse parallel der y-Achse ist und welche die in der x-Richtung liegende Sehne l symmetrisch überspannt.

Ist der prismatische Lastkörper nicht an unendlich vielen Stellen, sondern nur an einzelnen Punkten zerschnitten und an diesen Stellen mit der Kette verbunden, so wird die Gleichgewichtsform wieder ein Vieleck, ein Seileck, und zwar ist dies Seileck ein der Parabel (Gl. 5) eingeschriebenes Vieleck. Durchschneidet man (Fig. 246) die Stangenverbindung im Gelenkpunkte P (der Koordinaten x und y), so müssen die hier auftretenden Spannkräfte H und V nebst den in A auftretenden Widerständen $A = \frac{1}{2}ql$ und H

wieder den zwischenliegenden Lasten qx das Gleichgewicht halten. Es entsteht dann ganz dieselbe Momentengleichung wie auf S. 207, und für irgend einen Knotenpunkt P gilt die Gl. 5. Liegen nämlich die Befestigungspunkte A und B in gleicher Höhe und in dem Abstand l, so ergibt sich leicht, dafs $A = B = {}^1/_2 ql$ sein mufs, wie auch die Schnittstellen liegen mögen. Also:

Fig. 246.

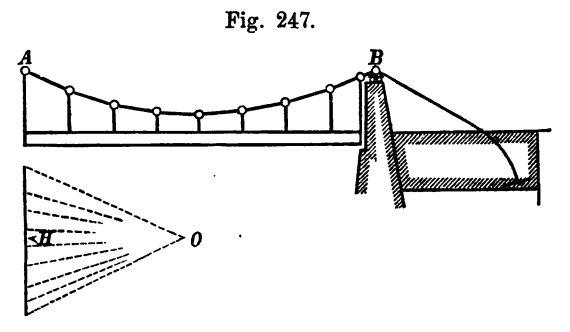


Ist eine Stangenverbindung derartig belastet, dafs die Last sich gleichförmig über die wagerechte Projektion verteilt, aber nur in einzelnen, den Teillinien der Last entsprechenden Gelenkpunkten auf die Stangenverbindung übertragen wird, so ist die Gleichgewichtsform ein Sehnenvieleck einer Parabel mit lotrechter Achse; die wagerechte Spannkraft beträgt $H = \frac{ql^2}{8f}$, wenn l die Spannweite, f die Pfeilhöhe der Parabel.

Sind die einzelnen Teile des prismatischen Lastkörpers nicht an den Schnittstellen, sondern je in der Mitte durch Hängestangen an der Gelenkstangenverbindung befestigt, so bildet die Gleichgewichtsform der letzteren, wie sich aus einer Betrachtung der Fig. 243 ergibt, ein der Parabel umschriebenes Seileck.

Beispiel: Die Kette einer Hängebrücke habe 40 m Spannweite und 5 m Pfeilhöhe (Fig. 247). Ihre Belastung verteile sich nahezu gleichmäfsig über die wagerechte Projektion und betrage $q = 1000$ kg für das Meter Länge. Die Kettenglieder werden demnach einer Parabel eingeschrieben sein. Die wagerechte Spannkraft wird $H = \frac{ql^2}{8f} = \frac{1000 \cdot 40 \cdot 40}{8 \cdot 5} = 40000$ kg. Die ganze Spannweite sei durch Hängestangen in acht gleiche Fache von je 5 m Länge

Fig. 247.



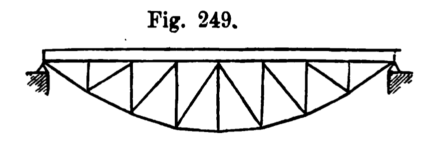
geteilt. Dann hat jede Stange das Gewicht zweier halben Fache $= 5000^{kg}$ auf die Kette zu übertragen. Da sieben mittlere Knotenpunkte vorhanden sind, so kann man das entsprechende Krafteck zeichnen, indem man die sieben Lasten von je 5000^{kg} auf einer Lotrechten aufträgt ($5000^{kg} = 2^1/_2{}^{mm}$). Der Mitte der Lasten gegenüber wählt man in einem Abstand $H = 40000^{kg} = 20^{mm}$ den Pol O. Die Polstrahlen nach den Teilpunkten der Lastlinie geben dann Richtung und Gröfse der Spannkräfte der einzelnen Stäbe. Ein Punkt P der Kette in einem Abstand $x = {}^1/_4 l$ von der Mitte hat eine Höhe y über dem Scheitel C (nach Gl. 3): $y = f \cdot 4x^2 : l^2 = f \cdot {}^1/_4 = {}^5/_4{}^m$. Würde man die Aufhängepunkte A und B an den Pfeilern befestigen, so würden diese einen Druck $A = B = {}^1/_2 ql$ nach unten, zugleich aber eine nach innen gerichtete wagerechte Kraft $H = 40000^{kg}$ erfahren. Letzterer würde ein hoher Pfeiler nicht leicht widerstehen können, daher führt man die Kette jenseits dss Pfeilers fort und verankert sie in tiefer liegendem Mauerwerke, so dafs der Pfeiler im wesentlichen nur lotrechten Druck erfährt. Die Breite der Pfeiler macht es unmöglich, die Endpunkte A und B als Aufhängepunkte der Last zu benutzen. Die hierdurch veranlafste Abweichung ist auf der rechten Seite, bei B, berücksichtigt (auch im Krafteck), während auf der linken, bei A, der ideelle Zustand beibehalten wurde.

Die nach aufsen gerichtete Kraft H kann auf die beiden Punkte A und B auch durch eine steife gerade Verbindungsstange ausgeübt werden, welche diese Kraft H als Druckkraft auszuhalten hat (Fig. 248). Alsdann brauchen die Stützen nur noch lotrecht aufwärts gerichtete Widerstände A und B zu leisten. Die Fahrbahn, welche bei Hängebrücken unter der Kette sich befindet, kann nun auch in die Höhe der Stange AB gelegt und durch Druckstangen auf die Gelenke der Kette gestützt werden. Das Sehnen-Vieleck der Parabel bleibt aber nur im Gleichgewichte, solange die Last gleichförmig verteilt ist.

Fig. 248.

Kommt eine fremde Last hinzu, so wird die Stangenverbindung eine Verrückung erfahren; es treten Schwankungen ein, die bei Kettenbrücken bekannt sind, und erst nach längerer Zeit kann sich ein neuer Gleichgewichtszustand bilden, wenn keine fernere Änderung der Last erfolgt. Diese Bewegungen kann man mehr oder weniger verhindern, indem man die einzelnen, in Fig. 249 befindlichen Trapeze durch Einfügung je einer Diagonale oder Strebe zu geometrisch bestimmten Figuren umwandelt. Auf diese Weise entsteht ein **parabolischer Fachwerkträger**. Dreht man die Figur um eine wagerechte Achse, bis das parabolische Vieleck oberhalb

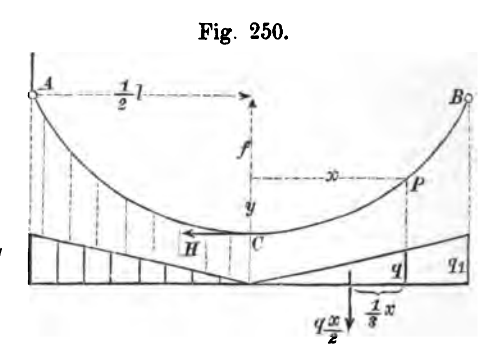
Fig. 249.



der Sehne AB liegt, so hat man einen parabolischen Träger anderer Art. Die Stäbe des Vielecks erfahren dann Druck, die Sehne AB aber Zug. (S. A. Ritter, Techn. Mechanik, 2. Aufl., S. 244.)

Kettenlinie für gleichförmig veränderte Belastung. Besteht der Belastungskörper aus zwei symmetrischen Keilen (Fig. 250), so ist die Belastung q der Längeneinheit veränderlich, nämlich

Fig. 250.



$$q = q_1 \frac{x}{{}^1/_2\, l},$$

wenn q_1 die Einheitsbelastung an den äufseren Enden ist. Zwischen C und P befindet sich dann eine Gesamtlast ${}^1/_2\, qx$ mit dem Hebelarm ${}^1/_3\, x$ in Bezug auf P. Daraus folgt die Momentengleichung

$$0 = Hy - \frac{qx}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$6)\qquad y = \frac{qx^2}{6H} = \frac{q_1 x^3}{3Hl}.$$

Wird wiederum $y = f$ für $x = {}^1/_2\, l$, so ergibt sich auch leicht

$$7)\qquad y : f = 8x^3 : l^3.$$

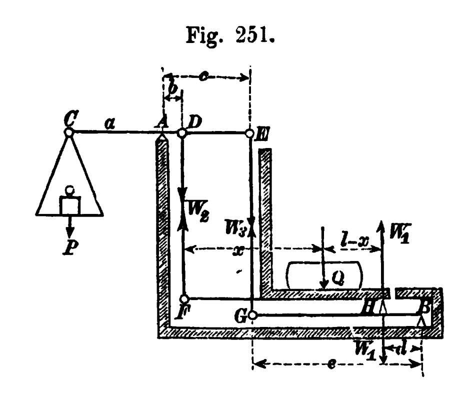
Die Kettenlinie bildet also von C bis B einen Zweig einer kubischen Parabel; CA ist dazu symmetrisch.

9. Brücken- und Tafelwagen.

Bei den auf S. 176 behandelten Hebelwagen wurde die Belastung einer Wagschale mittels Hängeketten auf einen bestimmten Punkt des Wagebalkens übertragen. Die dem Aufbringen der Last unter Umständen hinderlichen Ketten lassen sich entbehren, man kann für die Last eine freie Brücke oder Tafel schaffen und durch Anwendung geeigneter Stangenverbindungen erreichen, dafs die Last an jede beliebige Stelle der Brücke oder Tafel gelegt werden darf, ohne das Ergebnis der Wägung zu beeinflussen.

Brückenwage des Strafsburger Mechanikers Quintenz (1821). (Fig. 251). Das Ganze zeigt im Aufrifs 2 feste Drehpunkte A und B. Die Stange EG, welche in der Figur den Brückenbalken FH schneidet, geht in Wirklichkeit ungehindert daran vorbei, weil FH ebenso wie GB im Grundrifs aus 2 Teilen besteht. Die Last Q wird mittels des Brückenbalkens FH von zwei Kräften W_1 und W_2 im Gleichgewichte gehalten, u. zw. ist $W_1 = Qx:l$; $W_2 = Q - Qx:l$, wenn l die Länge des Balkens ist. W_2 wird mittels der Zugstange FD auf den oberen Hebel CAE übertragen. W_1 drückt auf den untersten Hebel BG nach unten und wird durch die bei G angreifende Spannkraft $W_3 = W_1 \frac{d}{e} = \frac{Q\,x}{l}\frac{d}{e}$ im Gleichgewichte gehalten. Der oberste Hebel trägt bei C die Schale mit dem Gewichtstücke P, welches den Spannkräften W_2 und W_3 das Gleichgewicht halten mufs. Also wird

Fig. 251.



$$Pa = W_2 b + W_3 c = \left(Q - Q\frac{x}{l}\right) b + \frac{Qx}{l}\frac{d}{e} c,$$

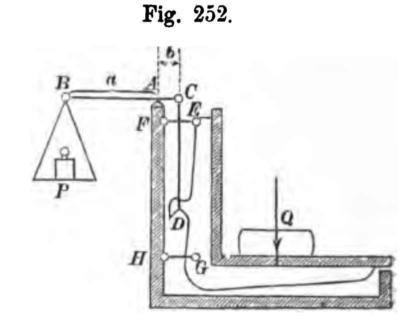
oder

$$Pa = Qb - Q\frac{x}{l}\left(b - \frac{d}{e} c\right).$$

Damit nun die Lage der Last auf der Brücke gleichgültig sei, mufs in der letzten Gleichung das mit x behaftete Glied verschwinden, es mufs $b = \frac{d}{e} c$ oder $b : c = d : e$ sein; d. h. die rechte Seite ADE des obersten Hebels mufs mit dem untersten Hebel BHG in gleichem Verhältnisse geteilt sein. Dann wird $Pa = Qb$, d. h. die Anwendung der Stangen und Hebel bewirkt, dafs es für den obersten Hebel so ist, als ob die Last Q unmittelbar bei D hinge. Macht man dann noch $a = 10b$, so hat man eine sog. Dezimalwage.

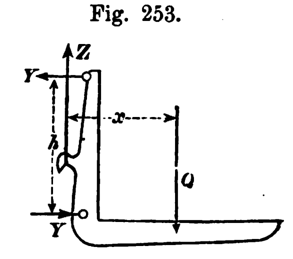
Brückenwage von George (Paris), 1840. Die Brücke (Fig. 252) wird von einem L-förmigen Rahmen getragen. Dieser hängt im Punkte D mittels einer Hängestange DC an dem oberen Hebel CAB. Damit die durch Q belastete Brücke wegen ihrer seitlichen Unterstützung nicht umkippe, wird sie durch zwei parallele Stäbe EF und GH so geführt, dafs sie stets parallel ihrer ursprünglichen Lage bleibt.

Fig. 252.



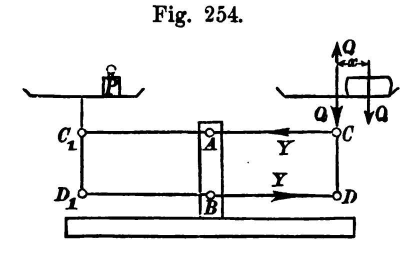
An der Brücke halten sich im Gleichgewichte (Fig. 253) das Gewicht Q, die Kraft Z der Hängestange und die Kräfte Y und Y der Führungsstangen. Daher mufs $Yh = Qx$ sein und, was die Hauptsache, $Z = Q$, d. h. die Zugstange CD überträgt auf den obersten Hebel einfach die Last Q. Eine Verschiebung der Last beeinflufst nur die Kraft in den Führungsstangen; es wird also wieder $Pa = Qb$.

Fig. 253.



Tafelwage. Auf demselben Grundgedanken beruhen die Tafelwagen, welche einfach auf jeden Tisch gestellt werden können und bei denen die Schalen oben frei liegen (Fig. 254). Auch hier kann die Last an jede Stelle der Schale gelegt werden. In der Linie CD fügt man zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte Q hinzu, dann wirkt die abwärts gerichtete dieser beiden niederdrückend auf die parallelen Hebel CAC_1 und DBD_1, während das aufserdem wirkende Moment Qx von den in der Längenrichtung dieser Hebel auftretenden, von den festen Drehpunkten A und B aufzunehmenden Kräften Y aufgehoben wird. Die Wage wirkt also wie eine gleicharmige Balkenwage. Wagerechter Stand bedingt Gleichheit zwischen Last Q und Gewichtstück P.

Fig. 254.

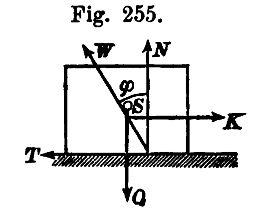


10. Reibung.

a) Reibungsziffer, Reibungswinkel und Reibungskegel.

Bisher haben wir die Körper als vollkommen glatt angenommen, wobei sie infolge einfacher Berührung nur Normalkräfte aufeinander ausüben konnten. Wäre dies wirklich der Fall, so würde ein Körper auf wagerechter Ebene, einmal in Bewegung gesetzt, seine Bewegung stets mit derselben Geschwindigkeit fortsetzen. Die Erfahrung lehrt aber, dafs dies nicht zutrifft, dafs vielmehr eine gewisse Zugkraft K erforderlich ist, um den Körper in gleichförmiger Bewegung zu erhalten. Daraus folgt das Vorhandensein eines Tangential- oder Reibungswiderstandes $T = K$ (Fig. 255). Die Reibung ist eine Folge der Rauheit der Oberflächen der Körper. Ihre Gröfse ist in erster Linie von der Gröfse des Normaldruckes N abhängig, und man nennt das Verhältnis $T : N = f$ (*frictio*) die Reibungsziffer oder den Reibungs-Koëffizienten.

Fig. 255.



Ergibt sich, dafs zum gleichmäfsigen Fortziehen eines 62 kg schweren Schlittens auf einer wagerechten Eisfläche eine wagerechte Zugkraft $K = 2$ kg erforderlich ist, so beträgt die Reibungsziffer $f = \frac{T}{N} = \frac{K}{Q} = \frac{2}{62} = \frac{1}{31}$.

Die Reibungsziffer zweier Körper hängt wesentlich von der Beschaffenheit der Berührungsflächen ab, also von der Natur der Körper, von der Art der Bearbeitung und der etwaigen Schmierung.

Daneben hat auch die Geschwindigkeit der Gleitbewegung einen Einflufs auf die Reibung. Beim Übergang aus der Ruhe in die Bewegung ist die Reibung am gröfsten und nimmt mit wachsender Geschwindigkeit ab. Auch die Gröfse des auf die Flächeneinheit kommenden Druckes beeinflufst die Reibungsziffer. Bei sehr kleinem Einheitsdruck, also verhältnismäfsig grofser Berührungsfläche ist die Reibungsziffer grofs, mit zunehmendem Einheitsdrucke nimmt sie anfänglich ab, dann aber wieder zu, wie durch Versuche erkannt wurde.

Diese Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Gröfse des Einheitsdruckes ist aber nur erst für einige Sonderfälle näher festgestellt. Im allgemeinen müssen wir daher f als nur abhängig von der Beschaffenheit der Berührungsflächen behandeln, und voraussetzen, dafs die entsprechende Zahl durch

Versuche, deren Umstände dem zu behandelnden Falle möglichst ähnlich sind, ermittelt wurde.

Gleitet ein Körper auf fester Fläche, so besteht die Einwirkung der letzteren auf den Körper in dem Normalwiderstand N und dem Tangentialwiderstande $T = fN$. Die Mittelkraft W beider heifst der Gesamtwiderstand der festen Fläche und schliefst mit der Normalen N einen Winkel φ ein, für den

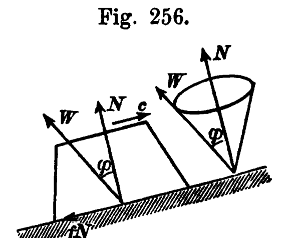
$$\operatorname{tg} \varphi = T : N = fN : N = f, \text{ d. h.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \tag{1}$$

Wegen der festen Beziehung zwischen φ und f nennt man φ den Reibungswinkel.

Der Reibungswiderstand ist stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Da nun die Gleitbewegung alle möglichen Richtungen in der Berührungsebene haben kann, so gilt von fN das Gleiche. Setzt man jede dieser Kräfte fN mit N zusammen (Fig. 256), so bekommt man unendlich viele mögliche Richtungen von W, welche eine Kegelfläche mit der Achse N bilden, den sog. Reibungskegel.

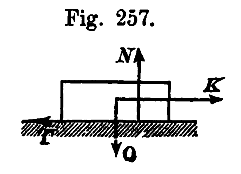
Fig. 256.



Der Reibungskegel ist eine Kegelfläche, deren Spitze im Angriffspunkte von N, deren Achse in der Richtungslinie von N liegt und deren Seiten mit der Achse den Reibungswinkel φ einschliefsen. Gleitet ein Körper auf einer festen Fläche, so leistet diese einen Gesamt-Widerstand W, der in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt.

Die von der Rauhigkeit der Körper herrührende Reibung ist nun aber eine Widerstandskraft, welche die relative Gleitbewegung an der Fläche wohl hindern oder verzögern, niemals aber eine solche hervorbringen oder beschleunigen kann. Liegt z. B. (Fig. 257) ein Körper vom Gewichte $Q = 100^{\text{kg}}$ auf wagerechter Ebene und ist $f = 0{,}3$, so ist zum gleichmäfsigen Fortziehen des Körpers (etwa mittels eines wagerecht gespannten Seiles) eine Kraft $K = 30^{\text{kg}}$ erforderlich. Diese Kräfte werden auch an dem Körper noch im Gleichgewichte sein, wenn die Geschwindigkeit desselben zu Null wird.

Fig. 257.

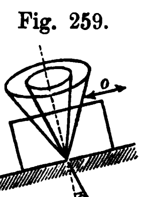


Zieht man aber an dem **ruhenden** Körper mit einer Kraft $K < 30^{kg}$, vielleicht nur mit einer Kraft von 10^{kg}, so wird nicht etwa der Reibungswiderstand T das Übergewicht über $K = 10^{kg}$ gewinnen und den Körper beschleunigt nach links bewegen, denn der Reibungswiderstand einer Fläche kann eine Gleitbewegung an derselben **nicht** erzeugen, vielmehr wird nun die Widerstandskraft T nur $= K = 10^{kg}$ werden. Und läfst man K zu Null werden, so wird auch $T = 0$.

Ist also ein Körper auf einer festen Fläche in **Ruhe**, so hat der Reibungswiderstand T im allgemeinen nicht den Wert fN, sondern er ist dann $\leqq fN$, **er tritt nur in derjenigen Gröfse auf, die erforderlich ist, um den Ruhezustand zu erhalten.** Dann ist aber auch der Winkel zwischen W und N (Fig. 259) $\beta \leqq \varphi$, und die Richtungslinie von W liegt nicht in der Mantelfläche, sondern im allgemeinen im Inneren des Reibungskegels.

Fig. 258.

Soll ein Körper sich auf einer festen Ebene gleichmäfsig und geradlinig verschieben, wobei der Gesamtwiderstand W in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt, so müssen die aufser W noch vorhandenen Kräfte eine Mittelkraft R liefern, welche mit der Kraft W im Gleichgewicht ist, also ebenfalls in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt (Fig. 258).


Fig. 259.

Soll der Körper aber auf der festen Fläche in relativer Ruhe verbleiben, wobei W im allgemeinen im Inneren des Reibungskegels liegt (Fig. 259), so mufs auch R eine solche Richtung und Lage haben. Liegt beim ruhenden Körper R auf der Mantelfläche des Reibungskegels, so genügen die Kräfte sowohl der Bedingung für die Ruhe als auch derjenigen für die Bewegung. Es befindet sich dann der Körper im **Grenzzustande der Ruhe.** Wird er in richtiger Weise (etwa durch einen Stofs) in Bewegung gesetzt, so verbleibt er auch in dieser.

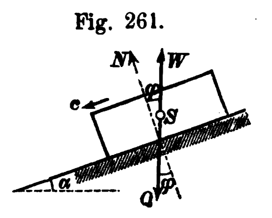
Fig. 260.

Der Gesamtwiderstand W kann nur innerhalb des Bereiches der Unterstützungsfläche (s. S. 190) angreifen. Durch diese Unterstützungsfläche mufs daher auch R hindurchgehen; andernfalls würde der Körper umkippen (Fig. 260).

b) Schiefe Ebene.

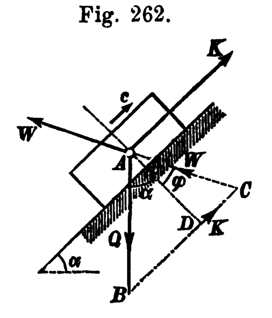
Ist die Unterstützungsebene des Körpers unter dem Winkel α gegen die Wagerechte geneigt und hat man diesen Winkel so geregelt, dafs der Körper unter alleiniger Wirkung der Schwere eine gleichmäfsige, geradlinige Abwärtsverschiebung ausführt, wobei der Gesamtwiderstand W in der Richtung aufwärts von N um den vollen Reibungswinkel φ abweicht, so mufs die einzige bewegende Kraft, die Schwere Q des Körpers, das Entgegengesetzte von W sein (Fig. 261). Da aber die Lotrechte mit der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene den Winkel α bildet, so mufs $\alpha = \varphi$ sein. Hierin liegt das einfachste Mittel zur Bestimmung des Reibungswinkels φ durch Versuche: Hebt man die schiefe Ebene allmählich höher an, bis der darauf liegende Körper, durch kleine Stöfse in Bewegung gebracht, die Bewegung gleichförmig fortsetzt, so ist der entsprechende Neigungswinkel α gleich dem Reibungswinkel φ für die beiden Stoffe, aus denen Körper und Bahn bestehen.

Fig. 261.



Es möge nun auf den Körper vom Gewichte Q noch eine, parallel zur schiefen Ebene, aufwärts gerichtete Zugkraft K wirken (Fig. 262). K möge sich mit der Richtungslinie von Q im Punkt A schneiden. Soll der Körper gleichförmig **aufwärts** gezogen werden, so übt die Ebene auf ihn einen Widerstand W aus, der von der (punktierten) Normalen zur Ebene um den vollen Reibungswinkel φ nach unten abweicht. Diese drei Kräfte Q, K und W müssen sich nun im Gleichgewichte halten, d. h. sie müssen sich in dem Punkt A schneiden und aufserdem ein geschlossenes Krafteck bilden. Man trage also AB als Q auf, verlängere W nach unten und ziehe durch B eine Parallele zu K, d. h. zur Ebene, so ist ABC das Krafteck und BC die Gröfse K. Ohne Reibung wäre $W = N = DA$, mithin zeigt BD denjenigen Betrag, den K auf reibungsloser Ebene haben

Fig. 262.



müfste ($= Q \sin\alpha$), während DC wegen der Reibung hinzukommt. Da nun der Winkel $BAC = \alpha + \varphi$, $\measuredangle BCA$ aber $= 90^0 - \varphi$, so wird nach dem Sinus-Satze $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(90^0 - \varphi)$, oder:

1) $$K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \cos\varphi,$$

oder auch, bequemer für die Rechnung:

2) $$K : Q = \sin\alpha + f \cos\alpha,$$

wenn man $\sin\varphi : \cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ mit f vertauscht.

Soll aber der Körper nicht hinauf gezogen, sondern durch die aufwärts gerichtete Kraft, die nun K_1 genannt werden möge, etwa an einem Seile, gleichmäfsig hinabgelassen werden (Fig. 263), so kehrt sich, wegen der entgegengesetzten Bewegung, die Reibung um, und der Widerstand W rückt in die zum ersten Falle symmetrische Lage, indem er von der Normalen nach oben hin abweicht. Die erforderliche Kraft K_1 wird nun durch das erheblich kleinere Stück BC_1 dargestellt.

Fig. 263.

$$\measuredangle BAC_1 = \alpha - \varphi; \quad \measuredangle BC_1A = 90^0 + \varphi,$$

mithin

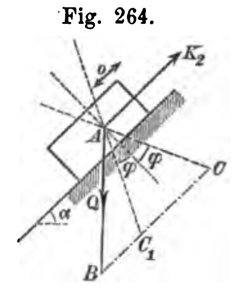
3) $$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(90^0 + \varphi)$$
$$= \sin(\alpha - \varphi) : \cos\varphi$$

4) $$= \sin\alpha - f\cos\alpha.$$

(Für $\varphi > \alpha$ müfste K_1 abwärts gerichtet sein.)

Soll die Kraft K aber den Körper weder hinaufziehen noch hinunterlassen, soll sie vielmehr den in Ruhe befindlichen Körper in Ruhe erhalten, so hat man zur Bestimmung ihrer Gröfse K_2 zu beachten, dafs im Ruhezustande der Widerstand W irgend eine Richtung innerhalb des Reibungskegels, also hier innerhalb des doppelten Reibungswinkels einnehmen kann (Fig. 264), dafs daher der Endpunkt der Kraft K_2 im Krafteck irgendwo zwischen C_1 und C liegen mufs, so dafs

Fig. 264.



$$K_2 \geqq K_1 \text{ und zugleich } K_2 \leqq K$$

sein mufs, innerhalb dieser Grenzen aber völlig willkürlich gewählt werden kann.

Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen in die einzige Gleichung:

5) $$K = Q(\sin\alpha \pm f\cos\alpha).$$

Darin bezieht sich das obere Vorzeichen auf die gröfsere, zum Hinaufziehen erforderliche Zugkraft, welche neben der Seitenkraft der Schwere ($Q\sin\alpha$) noch die Reibung ($fQ\cos\alpha$) überwinden mufs; das untere Vorzeichen auf die kleinere, zum Hinablassen erforderliche Kraft. Der Einflufs der entgegengesetzten Bewegung macht sich in der Formel durch Umkehrung der Vorzeichen von φ oder f geltend, wie auch in allen späteren Fällen sich zeigen wird. Diese beiden Werte K und K_1 bilden dann zugleich die Grenzen für die zum Festhalten erforderliche Kraft K_2. Wäre nämlich $K_2 < K_1$, so würde der Körper beschleunigt abwärts gleiten, wäre $K_2 > K$, so würde der Körper eine Beschleunigung nach oben erfahren. Soll weder das Eine noch das Andere erfolgen, so mufs K_2 zwischen K_1 und K bleiben, ist im übrigen aber beliebig. Das Ergebnis, dafs die für den Ruhezustand erforderliche Kraft zwischen den beiden, für die abwärts, bezw. aufwärts gerichtete Bewegung erforderlichen Kräften bleiben mufs, gilt auch für alle anderen im nachstehenden behandelten Fälle dieser Art.

Beispiel: Eine Holzkiste von 100 kg Gewicht soll auf einer unter 45° geneigten Ebene mittels eines, parallel mit der Ebene gespannten Seiles aufwärts gezogen werden. Die Reibungsziffer betrage unter der Annahme einer hölzernen Bahn $f = 0{,}3$, entsprechend einem Reibungswinkel $\varphi = 17^\circ$. Für $\alpha = 45^\circ$ ist $\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{1/2} = 0{,}707$. Mithin (Gl. 5)

$$K = 100 \cdot 0{,}707\ (1 \pm 0{,}3) = 70{,}7 \pm 21{,}2 = 91{,}9^{\text{kg}} \text{ bezw. } 49{,}5^{\text{kg}}.$$

Darin ist 70,7 der zur Überwindung der schräg abwärts gerichteten Seitenkraft der Schwere erforderliche Teil, 21,2 der Reibungswiderstand. Zum Hinaufziehen mufs an dem Seile mit 91,9 kg gezogen werden, zum Hinablassen sind nur 49,5 kg erforderlich. Ist die Kiste in Ruhe und soll sie auch mittels des Seiles in Ruhe gehalten werden, so mufs man an dem Seile mit einer Kraft K_2 ziehen, welche zwischen 49,5 und 91,9 kg liegt. Übt man nur die kleinste zulässige Kraft von 49,5 kg aus, so mufs die Reibung mit ihrem vollen Betrage von 21,2 kg dem Arbeiter zu Hülfe kommen, um die Seitenkraft der Schwere von 70,7 kg aufzuheben. Es erfordert diese Verwendung der kleinsten Kraft aber ein gewisses Mafs von Aufmerksamkeit; denn läfst die ausgeübte Kraft nur im geringsten nach, so erfolgt eine beschleunigte Abwärtsbewegung,

die dann nur mit gröfserer Anstrengung wieder aufzuheben ist. Übt man an dem Seile, der Sicherheit wegen, eine gröfsere Kraft aus als $49{,}5^{kg}$, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Ruhezustande nichts; die Reibung tritt dann nur mit entsprechend geringerem Betrag auf. Hat die Spannkraft den Wert $70{,}7^{kg}$, so kommt gar keine Reibung zur Wirkung, denn diese tritt im Ruhezustande stets nur in derjenigen Gröfse auf, die nötig ist, um das Gleiten zu verhindern. In diesem Falle würde auch bei völlig glatten Körpern kein Gleiten eintreten. Wächst die Spannkraft über $70{,}7^{kg}$ hinaus, so würde bei glatten Körpern schon ein beschleunigtes Gleiten nach oben eintreten; in Wirklichkeit wird der Überschufs einstweilen noch durch Reibung vernichtet, die nun aber sich nach unten richtet und der Schwere zu Hülfe kommt. Bei $91{,}9^{kg}$ Kraft nimmt diese Reibung den gröfsten möglichen Wert an. Würde der Körper nun durch einen kleinen Anstofs nach oben in Bewegung gesetzt, so würde er diese Bewegung auch fortsetzen. Erschütterungen können den Eingriff der Unebenheiten der Körper zeitweise aufheben oder vermindern und deshalb auch die Reibung teilweise aufheben.

Ist die Zugkraft K nicht parallel der Ebene, sondern weicht sie von der Normalen zur Ebene um einen Winkel β ab (Fig. 265), so verfährt man im übrigen wie oben. K und Q mögen sich in A schneiden. Von A aus trage man $Q = AB$ auf, zeichne W wie in Fig. 262, ziehe $BC \parallel K$, so ist $BC = K$ für die Aufwärtsbewegung. Und zwar ist

Fig. 265.

6) $\quad K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\beta - \varphi)$.

Für gleichförmige Abwärtsbewegung ist wiederum nur $+\varphi$ mit $-\varphi$ und umgekehrt zu vertauschen, also

7) $$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(\beta + \varphi).$$

Für Ruhezustand ist erforderlich, dafs K_2 zwischen K_1 und K verbleibe.

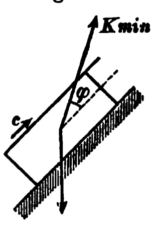
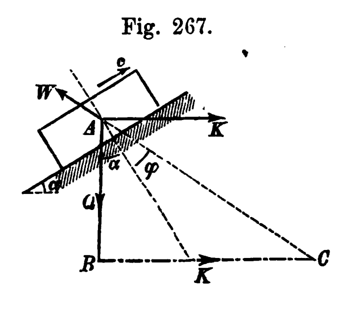


Fig. 266.

Denkt man sich die Richtung der Zugkraft K, etwa des Zugseiles, veränderlich, so ändert sich auch die Gröfse von K. In dem Dreieck ABC (Fig. 265) wird $K = BC$ offenbar am kleinsten, wenn BC rechtwinklig zu AC ist, wenn also $\measuredangle ACB = \beta - \varphi = 90^0$, oder $\beta = 90^0 + \varphi$; es weicht dann die Kraft K von der Parallelen zur Ebene um den Reibungswinkel nach oben hin ab, und es ist (Fig. 266) $K_{min} = Q \sin(\alpha + \varphi)$. Dagegen wird

$K = BC$ (Fig. 265) immer gröfser, wenn der Winkel ACB abnimmt; ist endlich $BC \parallel W$, d. h. $\beta = \varphi$, so wird $K = \infty$. Für diese Richtung einer zunächst endlich gedachten Kraft K fällt nämlich die Mittelkraft R aus K und Q in das Innere des Reibungskegels, wobei eine gleichförmige Gleitbewegung nicht möglich ist. Nur für $K = \infty$ würde Q gegen K verschwinden und R mit K und W zusammenfallen.

Fig. 267.



Ist K wagerecht, so wird $\beta = 90^0 - \alpha$. Dieser einfache Fall ist aber ebenso leicht unmittelbar zu entwickeln wie aus Gl. 6. Es ist (Fig. 267)

$$K : Q = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Schreibt man

$$8) \qquad K = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi),$$

so hat man in dem kleineren Werte wieder K_1 zum Hinablassen und in K und K_1 die Grenzen für den Ruhezustand.

Halbkugel auf schiefer Ebene. Eine Kugel kann unter alleiniger Einwirkung der Schwere auf schiefer Ebene nicht in Ruhe sein, wohl aber eine Halbkugel (Fig. 268). Der Gesamtwiderstand des Berührungspunktes A mufs das Gewicht Q aufheben. Der Normalwiderstand N geht stets durch den Mittelpunkt O. Es mufs stattfinden $N = Q \cos \alpha$, die Reibung $T = Q \sin \alpha$, und in Bezug auf O:

Fig. 268.

$$0 = + Tr - Q \cdot \overline{SO} \sin \vartheta,$$

mithin, weil nach S. 158 $\overline{SO} = {}^3/_8 r$:

$$\sin \vartheta = {}^8/_3 \sin \alpha.$$

Die Grenzbedingungen für die Ruhe sind $\sin \alpha \leqq {}^3/_8$, weil ϑ höchstens $= 90^0$ werden kann, und aufserdem $\alpha \leqq \varphi$, weil die Halbkugel sonst ins Gleiten kommt.

c) Bewegung in Keilnuten.

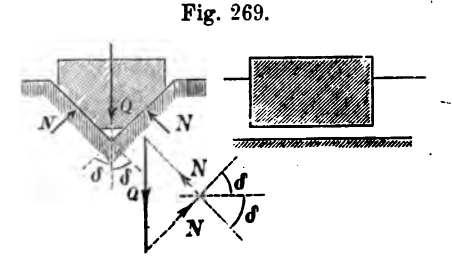
Liegt ein Körper, statt auf wagerechter Ebene, in einer wagerechten keilförmigen Rinne oder Keilnut mit dem Keilwinkel 2δ

(Fig. 269), so müssen in der Querschnittsebene die Gegendrücke N der Seitenflächen dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten. Es wird

$$Q = 2\,N \sin\delta \quad \text{oder} \quad 2\,N = Q : \sin\delta.$$

Der Bewegung setzt sich an jeder Seitenfläche ein Reibungswiderstand fN entgegen, so dafs die in der Längsrichtung der Keilnut erforderliche Zugkraft wird

Fig. 269.



$$9)\quad K = 2\,f\,N = \frac{Q f}{\sin\delta}.$$

Das keilartige Einpressen des Körpers in die Nut hat im Vergleiche mit der Bewegung auf ebener Fläche denselben Einflufs, als wäre die Rauhigkeit verstärkt, die Reibungsziffer f auf $f : \sin\delta$ vergröfsert (A. Ritter, Technische Mechanik). Dasselbe Ergebnis findet man auch in anderen Fällen, wenn man aus dem Falle der Bewegung eines Körpers auf einer ebenen oder krummen Fläche zu demjenigen übergeht, wo in die Fläche keilförmige Rinnen eingearbeitet sind, in die der Körper keilartig eingreift und längs deren der Körper gleitet. Man hat dann stets f zu vertauschen mit $f : \sin\delta$, oder auch den Reibungswinkel φ mit einem gröfseren Werte ψ, für den

$$10)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{f}{\sin\delta} \text{ ist.}$$

Gibt man z. B. der Rinne eine Neigung α gegen die Wagerechte (Fig. 270), so ergibt sich $Q \cos\alpha$ als diejenige Seitenkraft von Q, welche den Körper in die Keilnut eindrückt. In vorstehender Figur 269 ist dann Q mit $Q \cos\alpha$ zu vertauschen; daher wird

Fig. 270.

$$2\,N = Q \cos\alpha : \sin\delta$$

und der gesamte Reibungswiderstand

$$2\,f\,N = Q \cos\alpha \cdot f : \sin\delta.$$

Setzt man diesen Wert $= Q \sin\alpha$, so erhält man die Bedingung

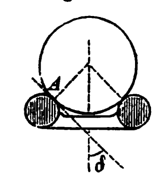
für gleichförmige Abwärtsbewegung durch die Schwere, nämlich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{\sin \delta} = \operatorname{tg} \psi, \quad \text{oder} \quad \alpha = \psi.$$

Es ist hierzu nicht erforderlich, dafs eine wirkliche Keilnut vorhanden sei; gleiche Wirkungen treten auch auf, wenn der Körper sich etwa zwischen 2 runde Bäume einkeilt, wenn also die von den bewegenden Kräften herrührende Seitenkraft (in der Richtung rechtwinklig zur Bewegung) von 2 Kräften N aufgehoben wird, die mit ihr in einer Ebene liegen, aber nicht parallel sind.

Soll ein runder Körper zwischen den Bäumen einer sog. Streichleiter gleiten (Fig. 271) und ist $\delta = 45^0$ der Winkel der Tangente bei A mit der Mittelebene, so wird $f : \sin \delta = 1{,}414 f$ als Reibungsziffer einzuführen sein, also wenn, wie in dem Beispiele auf S. 218, $f = 0{,}3$ ist, statt dessen 0,42. Bei $\alpha = 45^0$ wird dann $K = 100{,}4$; $K_1 = 41^{\text{kg}}$.

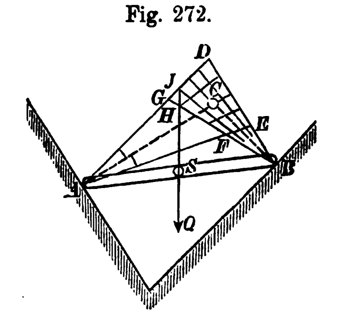
Fig. 271.



d) Stabförmiger Körper, von zwei Ebenen gestützt.

Der Körper mit dem Schwerpunkte S möge die Ebenen in den Punkten A und B berühren (Fig. 272), u. zw. sollen A, B und S in einer lotrechten Ebene liegen, zu welcher die beiden Stützebenen rechtwinklig sind. Wären die Körper völlig glatt, so könnten in A und B nur Normaldrücke N und N_1 entstehen, durch deren Schnittpunkt C die Schwerlinie des Stabes gehen müfste, wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Bei vorhandener Rauhigkeit aber hat man in A und B die Reibungskegel zu zeichnen; die Mittelschnitte derselben haben ein Viereck $DEFG$ gemeinsam, und dies Reibungsviereck ist der Bereich aller möglichen Schnittpunkte der Widerstände W und W_1 der Stützpunkte A und B. Da nun für Gleichgewicht die Kraft Q mit W und W_1 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben mufs, so erfordert der Ruhezustand, dafs die Schwerlinie des Stabes durch das Viereck hindurchgehen mufs. Schneidet

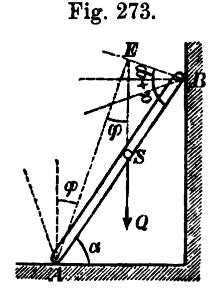
Fig. 272.



die Schwerlinie das Viereck aber vielleicht in HJ, so sind längs dieser Strecke HJ unendlich viele Schnittpunkte von W, W_1 und Q möglich, daher sind auch W und W_1 nach Richtung und Gröfse unbestimmt. Nur wenn Q durch einen der Grenzpunkte E und G des Vierecks geht, ist die Richtung (und dann auch die Gröfse) von W und W_1 bestimmt. In diesen Fällen befindet sich der Stab im Grenzzustande der Ruhe; W und W_1 liegen auf den Mantelflächen der Reibungskegel, es treten in A und B die vollen Reibungswerte auf, und bei dem geringsten Anstofs gerät der Stab ins Gleiten.

Ruhestand einer Leiter. Eine Leiter AB von der Länge l stütze sich bei A gegen den Boden und lehne sich bei B gegen eine lotrechte Wand (Fig. 273). Die Reibungsziffern für beide Ebenen seien die gleichen. Der Schwerpunkt S der (etwa belasteten) Leiter liege um $AS = nl$ von A entfernt. Gesucht wird der Neigungswinkel α, unter dem die Leiter an der Grenze des Ruhezustandes ist.

Fig. 273.



Wird die Leiter in gewöhnlicher Weise durch Besteigung belastet, so kann die Schwerlinie nur zwischen A und B hindurchgehen; es interessiert dann von dem Vierecke $DEFG$ der Schnittpunkte (Fig. 272) nur der rechtsseitige Endpunkt E, bis zu dem die Schwerlinie nach rechts sich bewegen darf, wenn noch Ruhe möglich sein soll. Dreieck AEB ist bei E rechtwinklig, ferner ist $\sphericalangle ASE = 90^0 + \alpha$, $\sphericalangle EBA = \alpha + \varphi$. Daher ist im $\triangle AES$:

$$AS : AE = \sin\varphi : \sin(90^0 + \alpha) = \sin\varphi : \cos\alpha;$$

im Dreieck ABE:

$$AB : AE = 1 : \sin(\alpha + \varphi),$$

und aus beiden Gleichungen durch Teilung:

$$AS : AB = nl : l = n = \frac{\sin\varphi \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{\cos\alpha}$$

$$\text{oder} \quad n\cos\alpha = \sin\varphi(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi).$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $\cos\alpha \cdot \cos^2\varphi$ und vertauscht $\operatorname{tg}\varphi$ mit f, $\cos^2\varphi$ aber mit $1 : (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 1 : (1 + f^2)$, so ergibt sich:

$$n(1 + f^2) = f(\operatorname{tg}\alpha + f),$$

oder, nach tg α aufgelöst:

1) $$\operatorname{tg}\alpha = n\left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

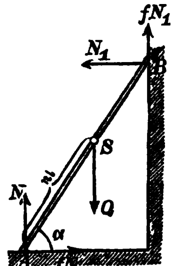
Ist also n gegeben, d. h. bekannt, wie weit das Gesamtgewicht der Leiter sich von dem unteren Endpunkt entfernen kann, so steht damit der Winkel α fest, welcher dem Grenzzustande der Ruhe entspricht.

Soll bei gegebener Schwerpunktslage Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sein, so muſs die wirkliche Schwerlinie links von E bleiben, oder es muſs das nach dem Punkt E berechnete n der Gleichung 1 gröſser sein als das wirkliche n_1: d. h. das wirkliche $n_1 < \frac{f(\operatorname{tg}\alpha + f)}{1+f^2}$, mithin

2) $$\operatorname{tg}\alpha > n_1\left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Man kann vorstehende Aufgabe, die wir hier geometrisch gelöst haben, auch rechnerisch auf Grund der drei Gleichgewichts-Bedingungen behandeln. Im Grenzzustande treten an den Berührungsstellen zu den Normaldrücken N und N_1 die vollen Reibungen fN und fN_1 hinzu, und zwar entgegengesetzt der Richtung des möglichen Ausgleitens, d. h. nach rechts, bezw. nach oben (Fig. 274). Die Gleichung der wagerechten Kräfte heiſst:

Fig. 274.



3) $$fN = N_1;$$

die Gleichung der lotrechten Kräfte:

4) $$N + fN_1 = Q;$$

die Momentengleichung in Bezug auf A:

5) $$0 = Qnl\cos\alpha - N_1 l\sin\alpha - fN_1 l\cos\alpha.$$

Letztere Gleichung gibt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Qn - fN_1}{N_1}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 ergibt sich aber:

$$N_1 = \frac{Q}{\frac{1}{f} + f},$$

mithin wird wiederum:

$$\operatorname{tg}\alpha = n\left(\frac{1}{f}+f\right)-f.$$

Beispiel: Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}4 = \operatorname{tg} 22^0$. Ist zunächst die Leiter durch ihr eigenes, in der Mitte angreifendes Gewicht belastet, d. h. $n = {}^1/_2$, so wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}05; \quad \alpha = 46^1/_2{}^0.$$

Bis zu diesem Werte dürfte α abnehmen, ohne dafs die Leiter ausglitte. Wird sie sodann bestiegen und hat der Besteigende dasselbe Gewicht wie die Leiter, so ist, wenn der Besteigende noch auf der untersten Sprosse steht, annähernd $n = {}^1/_4$, und

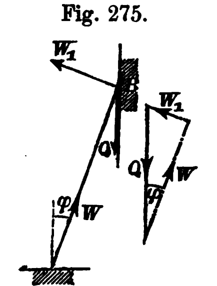
$$\operatorname{tg}\alpha = {}^1/_4(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 0{,}325; \quad \alpha = 18^0.$$

Diese geringe Neigung darf aber nicht gewählt werden, wenn die Leiter höher hinauf bestiegen werden soll. Ist sie nämlich bis zur Mitte erstiegen, so ist wieder $n = {}^1/_2$. Wird sie aber bis oben bestiegen, so ist zuletzt $n = {}^3/_4$ und

$$\operatorname{tg}\alpha = {}^3/_4(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}78; \quad \alpha = 60^0 40'.$$

Will man also eine Leiter bis zur höchsten Sprosse besteigen, so genügt es nicht, den Sicherheitszustand der unbelasteten Leiter zu prüfen; vielmehr ist eine steilere Stellung erforderlich. Zur Vermeidung jeder Gefahr befestige man an der obersten Sprosse ein Seil und hänge sich zur Probe an dieses, um denselben Belastungsfall zu haben wie beim Besteigen der Leiter bis zur höchsten Sprosse. — Ist die hierdurch bedingte steile Lage aus irgend welchen Gründen nicht gut ausführbar, so läfst sich auch bei kleinerem Winkel α die Sicherheit erhöhen, wenn ein zweiter Arbeiter seine Füfse entweder vor die Leiter setzt oder sich auf die unterste Sprosse stellt. Letzteres hat einen besseren Erfolg als das Davorstellen, wenn f für die Leiter vielleicht gröfser ist als für die Sohlen des Arbeiters.

Fig. 275.



Ist die Leiter sehr leicht, so wird, wenn ein Mensch sie bis oben erstiegen hat, annähernd $n = 1$, mithin

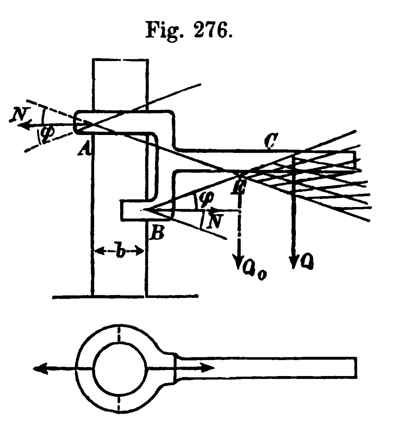
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{f} + f - f = \frac{1}{f}, \text{ d. h. } \alpha = 90^0 - \varphi;$$

d. h. in diesem Falle darf die Leiter höchstens um den Reibungswinkel von der Lotrechten abweichen (Fig. 275). Für $\varphi = 22^0$ wäre $\alpha = 68^0$. Die Gesamtwiderstände W und W_1 schneiden sich mit Q in B, es wird $W = Q\cos\varphi$; $W_1 = Q\sin\varphi$.

Reibungs-Hülsen und Reibungs-Ringe zur Aufhängung von Lasten. Soll an einer Säule ohne Vorsprünge eine Last nur durch Reibung sicher aufgehängt werden, so schiebe man (Fig. 276) über

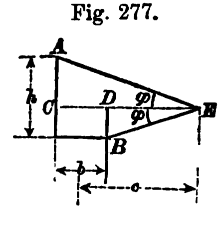
die Säule eine Hülse, welche erstere bei A und B berührt, bei A also einen geschlossenen Ring bildet, während bei B nur ein Ringsegment erforderlich ist.

Fig. 276.



Zuerst stützt man die Hülse gegen Hinabgleiten, etwa bei A, übt dann an dem seitlichen Arme C einen Druck nach unten aus und bewirkt dadurch ein Drehungsbestreben rechts herum, welchem sich bei A und B gleiche und entgegengesetzte Drücke N der Säule entgegenstellen. Mit Einschlufs der Reibung bilden sich nun in A und B Gesamtwiderstände W und W_1 innerhalb der Reibungskegel der Punkte A und B. Die Mittelschnitte der Reibungskegel treffen sich zunächst im Punkte E; rechts von E aber liegt der Bereich der möglichen Schnittpunkte von W und W_1. Geht daher das Gesamtgewicht Q der Hülse einschliefslich des belasteten Armes durch E, so befindet sich die Hülse im Grenzzustande der Ruhe, weil die Drücke N dann noch so gering sind, dafs nur die volle Reibung fN an beiden Stellen hinreicht, um das Abwärtsgleiten zu verhindern. Geht aber das Gesamtgewicht Q rechts von E vorbei, so ist das Gleichgewicht der Hülse gesichert, und zwar um so mehr, je weiter rechts Q liegt. Ist b die Breite der Säule, h der Höhenabstand der Punkte A und B, c die gesuchte Entfernung des Punktes E von der Mitte der Säule (Fig. 277), so findet man leicht

Fig. 277.



$$h = AC + DB = \left(c + \frac{b}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi + \left(c - \frac{b}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi$$

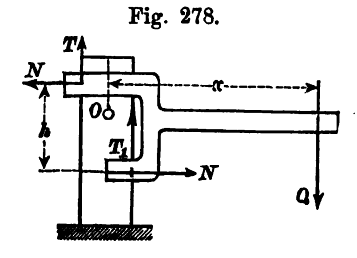
$$h = 2c \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad c = \frac{h}{2f}.$$

Ist x der Abstand der Gesamtlast Q von der Säulenmitte, so ist die Bedingung für Ruhe:

$$6) \qquad x \geqq c \quad \text{d. h.} \quad x \geqq \frac{h}{2f}.$$

Die Gröfse der Last Q ist ganz ohne Einflufs auf die Sicherheit des Gleichgewichts. Wenn also Säule und Hülse nur stark genug sind, so dafs sie annähernd als starre Körper gelten können, so kann man an dem Seitenarme jede beliebig grofse Last aufhängen, weil mit zunehmender Last auch N und die mögliche Reibung fN zunehmen.

Fig. 278.



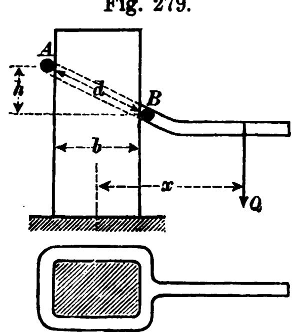
Nennen wir die bei A und B zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände T und T_1, so ist $T + T_1 = Q$. Wie sich Q auf T und T_1 verteilt, ist unbestimmt. Machen wir die willkürliche Annahme: $T = T_1 = {}^1\!/_2\, Q$, so können auch N und N_1 berechnet werden. In Bezug auf O (Fig. 278) ist dann, weil die Momente von T und T_1 sich aufheben, $Nh = Qx$. Die Summe der gröfsten möglichen Reibungswiderstände wäre

$$2fN = 2fQ\frac{x}{h} \text{ oder, weil } h = 2fc \text{ war,}$$

$$2fN = Qx:c;$$

weil nun von der Reibung nur der Teil Q beansprucht wird, so ist die gesamte mögliche Reibung $x:c$ mal so grofs wie die nötige; $x:c$ kann mithin als der Sicherheitsgrad bezeichnet werden.

Fig. 279.



Die Reibungshülse kann durch den einfachen Reibungsring (Fig. 279) (mit der gleichen Wirkung) ersetzt werden. Der etwa aus Rundeisen geschmiedete Ring hat eine Weite d, welche gröfser ist als die Breite der Säule, so dafs der Ring erst in schräger Lage die Säule bei A und B berührt. Die Reibungskegel bei A und B haben dann die gleiche Bedeutung wie in Figur 276.

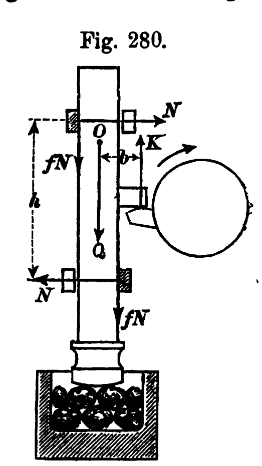
Beispiel: Es sei $b = 0{,}2$ m die Breite der Säule, $d = 0{,}21$ m die Weite des Ringes; dann wird $h = \sqrt{d^2 - b^2} = 0{,}064$ m. Ist nun für Holz und Schmiedeeisen (ohne Schmierung) $f = 0{,}5$, so wird $c = 0{,}064 : (2 \cdot 0{,}5) = 0{,}064$ m.

Macht man nun $x = 0{,}2\,^m$, so ist die Sicherheit gegen Gleiten eine $0{,}2 : 0{,}064 = 3$ fache (rund). Ist also die Gesamtlast $Q = 100\,^{kg}$, so ist die gesamte mögliche Reibung $300\,^{kg}$, von der aber nur $100\,^{kg}$ zur Wirkung kommen. Oder man kann die Sicherheit auch so auffassen, dafs die Reibungsziffer $0{,}5$ auf $1/3$ ihres Wertes sich vermindern darf, bevor Gleiten eintritt. Für $f = 1/6$ würde nämlich $c = 0{,}064 \cdot 3 = 0{,}192$, d. h. fast $= x$.

e) Gleichförmige Hebung eines Pochstempels.

Ein zum Zerkleinern von Erzen oder dgl. dienender Stempel vom Gewichte Q (Fig. 280) wird durch den Daumen einer sich drehenden Daumenwelle erfafst und mittels einer Kraft K gehoben, bis er, nachdem der Daumen an dem Hubarme vorbeigekommen ist, frei herabfällt und die von ihm getroffenen Körper zerstampft. Da K und Q einen wagerechten Abstand b haben, so würde der Stempel umfallen, wenn er nicht durch Führungen in lotrechter Lage gehalten würde. Von den Führungshölzern werden beim Heben nur die schraffierten wirksam und liefern gleiche Normaldrücke N, denen beim Aufwärtsgleiten abwärts gerichtete Reibungen fN entsprechen. Es ist nach der Gleichung der lotrechten Kräfte

Fig. 280.



$$1)\qquad K = Q + 2fN.$$

Die Momentengleichung in Bezug auf einen Punkt O der Mitte des Stempels lautet:

$$2)\qquad Nh = Kb.$$

Setzt man den hieraus erhaltenen Wert von N in Gl. 1 ein, so wird

$$K = Q + 2f\frac{Kb}{h}, \text{ mithin}$$

$$3)\qquad K = \frac{Q}{1 - 2f \cdot \frac{b}{h}}.$$

Soll K klein werden, so mufs $fb:h$ klein ausfallen; durch Glättung und Schmierung der Reibungsflächen mufs hiernach f klein gemacht

werden; der Arm b mufs so kurz sein, wie die Rücksichten der Ausführung und des Betriebes gestatten, und der Abstand h der Führungen mufs möglichst grofs sein.

Beispiel: Ist $Q = 150^{\text{kg}}$, $f = {}^1/_8$, $b:h = 1:8$, so wird $K = 155^{\text{kg}}$. In der vorstehenden Ableitung ist angenommen, dafs der Daumen auf den Arm b nur eine lotrechte Kraft ausübe; bei der Drehung der Welle gleitet aber der Daumen unter dem Arme nach rechts fort und wirkt durch Reibung nach rechts ziehend auf den Arm, so dafs zu der Kraft K noch die nach rechts wirkende Reibung $f_1 K$ hinzukommt. Dies ändert die sonstigen Kräfte, z. B. wird nun der Druck N an beiden Führungen nicht mehr der gleiche sein können (Fig. 281). Es wird

Fig. 281.

1) $$f_1 K = N_1 - N;$$

2) $$K = Q + f(N + N_1),$$

und in Bezug auf B:

3) $$0 = -Q\frac{d}{2} + Nh - fNd - K\left(b - \frac{d}{2}\right) + f_1 Kc.$$

Aus Gl. 1 und 2 wird $N = \dfrac{K(1 - ff_1) - Q}{2f}$ und sodann aus Gl. 3

$$K = \frac{Q}{1 - ff_1 + \frac{d}{h}f^2 f_1 - 2\frac{b}{h}f + \frac{2c}{h}ff_1}$$

oder

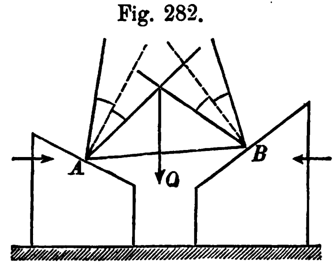
$$K = \frac{Q}{1 - 2\frac{b}{h}f - ff_1\left(1 - \frac{d}{h}f - \frac{2c}{h}\right)}.$$

$Q = 150$; $f = f_1 = {}^1/_8$; $b:h = {}^1/_8$; $d:h = {}^1/_{10}$; $c:h = {}^1/_2$ gibt dann $K = 155^{\text{kg}}$. Der Unterschied gegenüber obiger Vernachlässigung von f_1 ist verschwindend klein.

f) Festklemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen.

Sind die beiden Ebenen, zwischen denen eine Stange sich befindet, nicht fest, sondern gehören sie zwei Körpern an, die durch seitliche Kräfte einander genähert werden können (Fig. 282), so ist das Verhalten der Stange gegenüber dem Versuche, die stützenden Körper zusammenzuschieben, ein verschiedenes, je nachdem

Fig. 282.

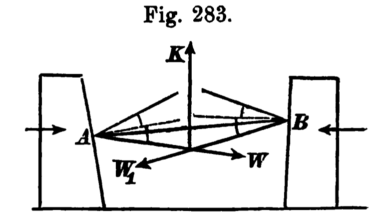


1. die Stange n i c h t in die beiden Reibungskegel der Punkte A und B fällt, oder aber
2. dieser Bedingung genügt.

Im ersten Falle können die Gesamtdrücke W und W_1 in A und B niemals in dieselbe Gerade (nämlich AB) fallen, können also auch niemals sich allein gegenseitig aufheben, sondern es können W und W_1 nur einer dritten Kraft, etwa dem Gewichte Q der Stange das Gleichgewicht halten. Ist nun die Stange sehr leicht, so dafs man annähernd $Q = 0$ annehmen darf, so werden auch W und W_1 zu Null, d. h. die Stange übt auf die seitlichen Körper keine nennenswerten Drücke aus. Versucht man, die Körper zusammenzuschieben, so kann die Stange dies nicht hindern, sondern sie weicht nach oben aus, indem sie sich entweder an beiden Stellen A und B oder nur an einer derselben längs der Ebene in die Höhe schiebt. An der Gleitstelle tritt dann der volle Reibungswiderstand auf, so dafs dort W oder W_1 die tiefste mögliche Lage einnimmt, falls Q nicht ganz gleich Null angenommen wird.

Liegt aber die Gerade AB innerhalb beider Reibungskegel (Fig. 283), so können W und W_1 auch beide in die Gerade AB fallen und sich dann allein, ohne Hinzutreten einer dritten Kraft, gegenseitig aufheben. Sie können nun in jeder beliebigen Gröfse auftreten, wenn die Stange zwischen den Ebenen ruht. Versucht man wieder, die Seitenkörper zusammenzuschieben, so wird die Stange dies vollständig verhindern. Je stärker man auf die Seitenkörper drückt, desto gröfser werden auch die Widerstände $W = W_1$. Soll die Stange aber, um Raum zu geben, bei A und B nach oben ausweichen, so kommen die tiefsten Richtungen von W und W_1 zur Geltung, und um unter deren Einwirkung eine Bewegung der Stange nach oben zu ermöglichen, mufs eine den Kräften W und W_1 das Gleichgewicht haltende, d. h. nach oben gerichtete Kraft K aufgewendet werden, und zwar ist die erforderliche Gröfse dieser Kraft K abhängig von der Gröfse der Pressung, die man vorher durch Zusammenschieben der Seitenkörper hervorgebracht hatte. Die Befreiung der Stange erfordert daher unter Umständen ein kräftiges Herausreifsen nach oben hin. Der Zustand, in dem sich die Stange in solchem Falle befand, nennt man ein Festklemmen zwischen den Seitenkörpern. Es ist ein solches Festklemmen möglich, wenn AB innerhalb der beiden Reibungskegel liegt.

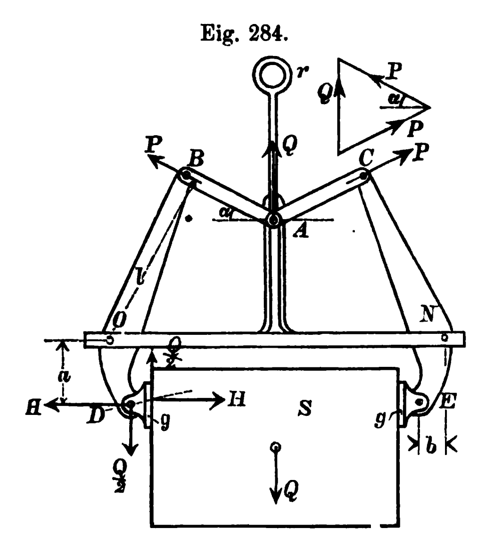
Fig. 283.



g) Steinzange zum Heben und Versetzen schwerer Werksteine.

Soll der Werkstein S (Fig. 284) vom Gewichte Q, der vorläufig auf dem Boden ruhen möge, von der Zange ergriffen werden, so öffnet man diese durch Hinunterschieben des Kniegelenkes A so weit, daſs der Abstand der unten befindlichen Greifer g und g gröſser ist als die Breite des Steines S. Die Greifer werden nun durch die Hände der Arbeiter an dem Stein in die gewünschte Lage gebracht und durch Emporziehen des Kniegelenkes A mittels einer an dem obersten Ringe r angreifenden Winde-Vorrichtung einander genähert, so daſs sie den Stein zwischen sich fassen und auf ihn bei weiterem Emporziehen des Ringes r so groſse wagerechte Druckkräfte H ausüben, daſs die hierdurch erzeugte Reibung genügt, um das Hinabgleiten des Steines aus den Greifern zu verhindern. Der Stein wird daher bei langsamer, gleichmäſsiger Bewegung der Winde von den Greifern durch Vermittelung der Reibung getragen werden, also, je nach der Bewegung des an der Winde hängenden Ringes r, sich aufwärts oder abwärts bewegen, oder auch in beliebiger Höhe ruhig hängen bleiben.

Fig. 284.



Die Bedingungen, unter denen der Stein S von den Greifern g und g mit Sicherheit gehalten wird, ergeben sich in folgender Weise: Jeder Greifer hat auf den Stein vom Gewichte Q auſser der wagerechten Druckkraft H noch eine lotrecht aufwärts gerichtete Kraft $^1/_2\,Q$ auszuüben (wie in Fig. 284 an dem linksseitigen Greifer angegeben). Die Mittelkraft beider überträgt sich von der Angriffsfläche des Greifers auf das untere Ende D des Hebels DOB, so daſs nach dem Satze der Wechselwirkung (S. 34) bei D auf den

Hebel die nach aufsen gerichtete Kraft H und die abwärts gerichtete Kraft $^1/_2\,Q$ wirken. Wenn der Stein zwischen den Greifern hängt, so übt die Winde auf das Kniegelenk A eine aufwärts gerichtete Zugkraft aus, die, wenn man das Gewicht der Steinzange gegenüber dem des Werksteines vernachlässigt, von der Gröfse Q sein mufs. Diese Kraft Q zerlegt sich an dem Kniegelenk A derartig in die beiden von den Gelenkstangen AB und AC aufzunehmenden Kräfte P, dafs nach dem in der Figur (oben rechts) gezeichneten Krafteck

$$P = \frac{Q}{2\sin\alpha} \tag{1}$$

ist. Diese Kräfte P drücken die oberen Enden B und C der um O und N drehbaren Hebel BOD und CNE auseinander und pressen hierdurch die Greifer an den Stein. Für das Gleichgewicht des Hebels DOB gilt (nach S. 175) in Bezug auf den Drehpunkt O die Momentengleichung

$$0 = -Pl + Ha + {}^1/_2\,Qb \quad \text{oder wegen Gl. 1:}$$

$$\frac{Q}{2}\left(\frac{l}{\sin\alpha} - b\right) = Ha, \quad \text{woraus folgt}$$

$$H = \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{a\sin\alpha} - \frac{b}{a}\right). \tag{2}$$

Soll nun an den Greifern kein Gleiten eintreten, so mufs die zum Festhalten des Steines erforderliche Reibungskraft $^1/_2\,Q$ kleiner als die gröfste mögliche Reibung fH, d. h.

$$f > \frac{1}{\dfrac{l}{a\sin\alpha} - \dfrac{b}{a}} \quad \text{sein.} \tag{3}$$

Beispiel: Ist etwa $l = 1{,}00\,\text{m}$; $a = 0{,}33\,\text{m}$; $b = 0{,}14\,\text{m}$; $\sin\alpha = 0{,}46$; $f = 0{,}5$, so mufs für sicheres Festhalten

$$f > \frac{1}{\dfrac{1}{0{,}33 \cdot 0{,}46} - \dfrac{0{,}14}{0{,}33}} = 0{,}16$$

sein. Würde also f auf diesen Wert herabsinken, so wäre keine Sicherheit gegen das Herausgleiten des Steines aus den Greifern mehr vorhanden. Kann man aber nach der Beschaffenheit der Berührungsflächen zwischen Stein und Greifer $f = 0{,}5$ annehmen, so ist der Grad der Sicherheit gegen das Abgleiten

$0{,}5 : 0{,}16 =$ etwa 3 fach.

h) Keil in dem Spalt eines Baumstammes oder dergl.

Ein zur Mittelebene symmetrischer Keil vom Keilwinkel 2δ (Fig. 285) soll durch eine Kraft K gleichmäfsig in dem Spalte weitergeschoben werden. Zu den Normaldrücken N kommen die in die Keilflächen fallenden, nach oben gerichteten Reibungswiderstände $f \cdot N$ hinzu. N schliefst den Winkel δ mit der Querrichtung des Keiles, fN denselben Winkel mit der Kraft K ein. Für Gleichgewicht wird daher (Fig. 285a)

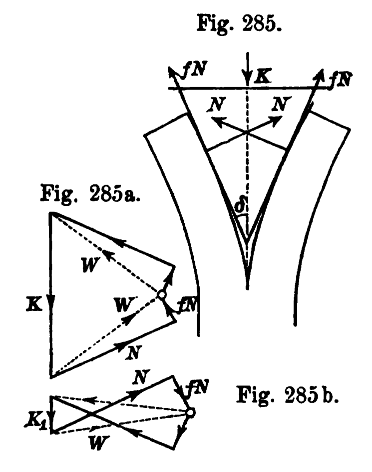


Fig. 285. Fig. 285a. Fig. 285b.

$$K = 2N\sin\delta + 2fN\cos\delta$$

$$1) \qquad = 2N(\sin\delta + f\cos\delta).$$

Oder auch $K = 2W\sin(\delta + \varphi)$
mit $W = N : \cos\varphi$.

Für die rückgängige Bewegung des Keiles gilt (ebenfalls mit dem Sinne der Kraft nach unten, Fig. 285b)

$$2) \qquad K_1 = 2N(\sin\delta - f\cos\delta).$$

Die Kraft K_2 aber, welche für den Ruhezustand des Keiles erforderlich ist, mufs zwischen den Werten K_1 und K bleiben.

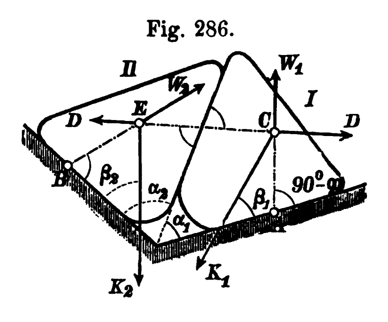
Ist $\delta > \varphi$, d. h. $\operatorname{tg}\delta > f$ oder $\sin\delta > f\cos\delta$, so ist $K_1 > 0$. In diesem Falle mufs auch bei der Aufwärtsbewegung noch eine abwärts gerichtete Kraft K_1 wirken, damit die Bewegung nicht beschleunigt, sondern gleichförmig erfolge. Die Drücke N würden trotz der Reibung noch im stande sein, den Keil beschleunigt aus dem Spalt hinauszutreiben; oder der zu stumpfe Keil wird, sobald die treibende Kraft aufhört, zurückspringen. Für $\delta < \varphi$ aber wird $K_1 < 0$, d. h. in diesem Fall ist ein Herausziehen des Keiles durch eine aufwärts gerichtete Kraft $(-K_1)$ nötig. Der Keil wird durch die Reibung im Spalte festgehalten; je gröfser die Seitendrücke N werden, um so fester steckt er; es findet hier also ähnliches statt wie beim Festklemmen einer Stange (S. 230), und zwar erfolgt dies Klemmen ebenfalls, wenn der Keilwinkel $2\delta < 2\varphi$. Auch hier können in solchem Falle die Gesamtdrücke W und W_1 der beiden Seitenflächen in dieselbe Linie fallen und sich allein gegenseitig aufheben.

Bei der gewöhnlichen Anwendung des Keiles zum Spalten ist die Wirkung der Triebkraft eine unterbrochene. Wäre nun $\delta > \varphi$, so würde der Keil in den Pausen zwischen zwei Schlägen zurückspringen. Damit dies nicht geschehe, mufs $\delta < \varphi$ gemacht werden, der Keil mufs sich gegen Zurückspringen festklemmen. Ein solcher Keil heifst selbstsperrend.

i) Gleichförmige Bewegung zweier sich berührenden Keile.

Zwei Keile mit den Keilwinkeln α_1 und α_2 (Fig. 286) berühren einander und aufserdem zwei Seitenebenen. Auf die Keile wirken die Kräfte K_1 und K_2, welche mit den festen Ebenen die Winkel β_1 und β_2 bilden. Es soll deren Verhältnis ermittelt werden, unter der Annahme, dafs Keil I der vorrückende, II der zurückgetriebene sei.

Fig. 286.



Die rechtsseitige Ebene übt einen Gesamtdruck W_1 aus, der von der Normalen zur Ebene um den Reibungswinkel φ nach rechts abweichen mufs, wenn Keil I nach links vorrückt. Der Angriffspunkt von W_1 ist unbestimmt, werde daher in A willkürlich angenommen. W_1 bildet mit dem oberen Teile der rechtsseitigen Unterstützungsebene, an der er abwärts gleitet, den spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ (mit dem unteren Teile den stumpfen Winkel $90^0 + \varphi$). Durch den Punkt C, in welchem W_1 die Kraft K_1 schneidet, mufs nun auch der gegenseitige Druck D zwischen beiden Keilen hindurchgehen, weil drei sich im Gleichgewichte haltende Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben müssen. D mufs die Berührungsebene beider Keile wieder so schneiden, dafs der spitze Winkel $90^0 - \varphi$ im Keile I auf der oberen Seite erscheint. (Die Winkel $90^0 - \varphi$ sind in der Figur durch kleine Kreisbögen hervorgehoben.) Der gegenseitige Druck D schneidet K_2 im Punkt E, durch welchen auch W_2 hindurchgehen mufs. Bei B aber, wo W_2 die linksseitige feste Ebene trifft, mufs der spitze Winkel $90^0 - \varphi$ an der unteren Seite erscheinen, da der Keil II nach oben gleitet. Hiermit stehen die Richtungen der Drücke an den Keilflächen fest; die Lagen ebenfalls, nachdem der Punkt A willkürlich angenommen

war. Trägt man nun die Kraft K_1 nach einem beliebigen Maſsstab als GF im Krafteck (Fig. 287) auf, setzt daran die Richtungen von W_1 und D, so schneiden sich beide in O und schlieſsen das Kräftedreieck GFO, wie es der Gleichgewichtszustand fordert. Zieht man $OJ \parallel W_2$, $GJ \parallel K_2$, so stehen nun auch die Kraftgröſsen W_2 und K_2 fest. Der Linienzug $ACEB$, dessen Seiten die Richtungslinien der Drücke an den drei Keilflächen darstellen, heiſst die Drucklinie der beiden Keile. Betrachtet man O als den Pol des Kraftecks, so sind die Seiten der Drucklinie den Polstrahlen OF, OG, OJ der Reihe nach parallel. Die Drucklinie bildet daher ein zu den Kräften K_1 und K_2 gezeichnetes Seileck. Die Lage des Poles O und die Gröſse der Kraft K_2 sind aber an die Bedingung gebunden, daſs die Seiten des Seilecks, d. h. der Drucklinie, die Keilflächen in ganz bestimmter Weise unter den Winkeln $90^0 - \varphi$ schneiden müssen. Will man nun die Kräfte aus dem Krafteck auch berechnen, so muſs man die Winkel des Kraftecks bestimmen.

Fig. 287.

Der spitze Winkel zwischen K_1 und W_1 würde $90^0 - \beta_1$ betragen, wenn W_1 ein Normaldruck wäre. Durch die Abweichung um φ wird jener Winkel noch um dieses Maſs kleiner, d. h. es wird $\measuredangle\, OFG = 90^0 - \beta_1 - \varphi = 90^0 - (\beta_1 + \varphi)$. Die Kräfte D und W_1 würden, wenn sie beide Normaldrücke wären, denselben Winkel α_1 miteinander bilden wie die entsprechenden Keilflächen; durch die Abweichung einer jeden um φ vergröſsert sich dieser Winkel um 2φ; daher ist $\measuredangle\, FOG = \alpha_1 + 2\varphi$. Entsprechend findet man $\measuredangle\, OJG = 90^0 - (\beta_2 - \varphi)$, $\measuredangle\, JOG = \alpha_2 - 2\varphi$. Sonach ergibt sich

$$K_1 : D = \sin(\alpha_1 + 2\varphi) : \cos(\beta_1 + \varphi);$$
$$K_2 : D = \sin(\alpha_2 - 2\varphi) : \cos(\beta_2 - \varphi).$$

Durch Teilung beider Gleichungen entsteht dann

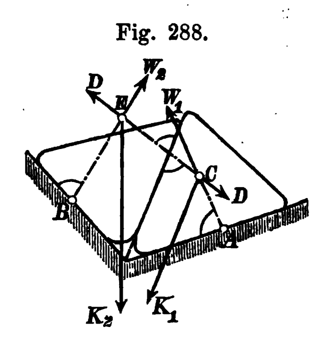
$$1) \qquad \frac{K_1}{K_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi)\cos(\beta_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi)\cos(\beta_1 + \varphi)}.$$

Für $\alpha_2 = 2\varphi$ würde $\measuredangle JOG = 0$ und $K_2 = 0$ oder $K_1 : K_2 = \infty$, in der Drucklinie würde BE mit CE zusammenfallen, d. h. der

Keil II würde zwischen Keil I und der linksseitigen Ebene sich festklemmen. Die vorausgesetzte Bewegung würde ferner unmöglich werden für $\beta_1 = 90^0 - \varphi$, weil dann $\measuredangle OFG = 0$ werden würde. In diesem Falle würde K_1 schon durch W_1 allein aufgehoben und es entstände durch die Kraft K_1 gar kein Druck D gegen den zweiten Keil, also auch keine Möglichkeit, die Kraft K_2 an dem Keile II zu überwinden.

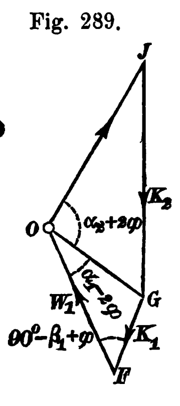
Soll die Bewegung der Keile umgekehrt erfolgen (Fig. 288), soll Keil II vorrücken und Keil I zurückweichen, so findet man, in einem Punkt A am Keile I beginnend, in gleicher Weise die Drucklinie; ihre einzelnen Seiten verdrehen sich aber, gegenüber der Fig. 286, je um 2φ. Die spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ liegen jetzt durchweg an der anderen Seite als in Fig. 286. Im Krafteck (Fig. 289) wird, wenn K_1 zu derselben Gröfse angenommen wird wie vorher, K_2 nun viel gröfser als vorher. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ergibt sich leicht, wenn man in Gl. 1 durchweg die Vorzeichen von φ umkehrt.

Fig. 288.



Sind endlich beide Keile in **Ruhe**, so liegt die Richtung des Widerstandes W_1 irgendwo innerhalb des doppelten Reibungswinkels, und dasselbe gilt für die Richtungen der Drücke D und W_2. Bei gegebenem K_1 hat nun der Pol O des Kraftecks keine bestimmte Lage mehr, weil W_1 und D innerhalb des doppelten Reibungswinkels jede Richtung haben können; ebenso wird die Richtung von W_2 unbestimmt und damit auch die Gröfse K_2. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ist jetzt nur durch die beiden Grenzen bestimmt, welche sich aus den beiden untersuchten Bewegungsfällen ergeben haben und welche man auch leicht rechnerisch findet, indem man Gl. 1 das eine Mal mit den angegebenen Vorzeichen von φ, das andere Mal mit den entgegengesetzten dieser Zeichen ausrechnet.

Fig. 289.



Man erkennt hieraus, dafs es für die beiden r u h e n d e n Keile im allgemeinen unendlich viele mögliche Drucklinien gibt. Jede derselben ist ein zu den Kräften K_2 und K_1 gezeichnetes Seileck,

zu dessen Konstruktion der Pol O und der Anfangspunkt A der Drucklinie innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden können. Da aber die Seiten der Drucklinie die Richtung und Lage der Drücke an Keilflächen darstellen, so müssen sie zwei einschränkenden Bedingungen genügen:

1. darf eine Seite der Drucklinie höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu der entsprechenden Keilfläche abweichen;

2. mufs eine Seite der Drucklinie die zugehörige Keilfläche innerhalb des Bereiches der Berührung (vgl. S. 190) schneiden.

Der Ruhezustand der beiden Keile unter Einwirkung gegebener Kräfte K_1 und K_2 ist nur möglich, wenn wenigstens eine, diesen Bedingungen entsprechende, Drucklinie nachweisbar ist.

Beispiel: Ein mit K_2 belasteter Pfosten (Fig. 290) soll mittels des untergeschobenen Keiles, an dem eine wagerechte Kraft K_1 wirkt, gleichmäfsig in die Höhe gekeilt werden. Die Drucklinie $ACEB$ ergibt sich leicht unter Annahme eines willkürlichen Punktes A. (Die spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ sind in Fig. 290 wieder durch kleine Bögen bezeichnet.) Der Druck D würde, wenn er ein Normaldruck wäre, mit der Lotrechten den Winkel α_1 bilden; wegen der Reibung wird dieser Winkel (s. das Krafteck Fig. 291) $OGJ = \alpha_1 + \varphi$. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ liefse sich leicht aus Gl. 1 berechnen, indem man dort die Sonderwerte dieses Falles einsetzte. Wir ziehen aber eine unmittelbare Berechnung vor. Man erkennt leicht, dafs W_1 und W_2 von den zueinander rechtwinkligen Gleitebenen nach derselben Seite um $90^0 - \varphi$ abweichen, also ebenfalls zueinander winkelrecht sein müssen. Das Viereck $GFOJ$ ist darnach bei G und bei O rechtwinklig, ist also ein einem Kreise vom Durchmesser FJ eingeschriebenes. Der Winkel $FOG = \alpha_1 + 2\varphi$ steht über dem Bogen $\widehat{FG}$; demselben Bogen entspricht aber auch der Umfangswinkel FJG, der somit dieselbe Gröfse $\alpha_1 + 2\varphi$ hat. Daher ist

Fig. 290.

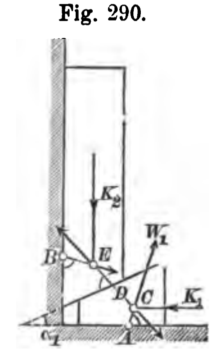


Fig. 291.

$$K_1 : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi).$$

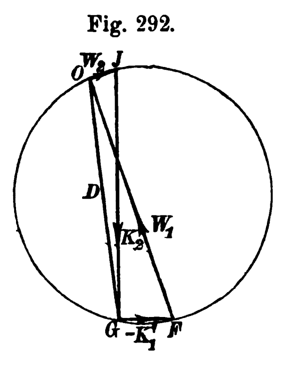
Für $\alpha_1 + 2\varphi = 90^0$ oder $\alpha_1 = 90^0 - 2\varphi$ mithin $\alpha_2 = 2\varphi$ wird $K_1 : K_2 = \infty$, oder das Hinaufkeilen unmöglich. Es fallen dann nämlich D und W_2 zusammen und klemmen den als zweiten Keil geltenden Pfosten fest.

Für die entgegengesetzte Bewegung, d. h. für gleichmäfsiges Hinablassen des Pfostens, gilt selbstverständlich

$$K_1' : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi).$$

Für die meisten Fälle ist es wünschenswert, dafs der untere Keil selbstsperrend sei, d. h. dafs für den Rückgang $K_1' < 0$ werde. Mithin mufs $\alpha_1 < 2\varphi$ sein. Für diesen Fall gilt das Krafteck Fig. 292, in welchem die den unteren Keil zurückziehende Kraft $-K_1' = GF$ ist. Der Druck D zwischen beiden Keilen bildet mit der Lotrechten den Winkel $OGJ = \alpha_1 - \varphi$. Würde dieser wegen $\alpha_1 = \varphi$ zu Null, so ergäbe sich D lotrecht und $OJ = W_2 = 0$. Unter diesen Umständen und ebenso für $\alpha_1 < \varphi$ würde sich der Pfosten beim Zurückziehen des unteren Keiles nicht mehr gegen die lotrechte Wand stützen; er würde vielmehr wegen des lotrechten D, welches dann $= K_2$ ist, durch den unteren Keil von der Wand abgezogen werden, würde auf dem Keile nicht abwärts gleiten, also auch nicht sinken; es würde also der Zweck der Rückwärtsbewegung nicht erreicht werden. Für $\alpha_1 < \varphi$ würde W_2 sogar negativ werden, d. h. es müfste der Pfosten durch eine besondere Kraft gegen die Wand gedrückt werden, um sich nicht von ihr zu entfernen. Daraus folgt, dafs der Keilwinkel α_1 zwischen den Werten φ und 2φ liegen mufs, damit die Vorrichtung ihren Zweck erfülle.

Fig. 292.



Zahlenbeispiel: Bei $f = 0{,}2$ oder $\varphi = 11^0$ und $\alpha_1 = 17^0$ mit $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}3$ wird $\operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi) = \operatorname{tg} 39^0 = 0{,}8$, mithin $K_1 = 0{,}8\, K_2$ für Hinaufkeilen; $\operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi) = -\operatorname{tg}(5^0) = -0{,}09$, d. h. $-K_1' = 0{,}09\, K_2$ für Hinunterlassen.

k) Wirkung der Keilpresse.

Dieselben Grundgedanken wie bei zwei Keilen gelten auch, wenn die Zahl der Keile gröfser ist. Gleiten die Keile, so tritt an jeder Keilfläche ein Druck auf, der von der Normalen zur Keilfläche um den Reibungswinkel abweicht. An jedem Keile halten sich die Flächendrücke mit einer dritten Kraft K im Gleichgewichte, schneiden sich daher in einem Punkte. Bei gleichmäfsiger Bewegung bilden die drei Kräfte jedes Keiles einen geschlossenen Streckenzug. Das ganze Krafteck aber bildet wiederum ein Krafteck der gegebenen Kräfte K mit seitwärts liegendem Pole. Die Polstrahlen sind die Drücke der Keilflächen; die dazu parallelen Richtungslinien dieser Kräfte bilden daher ein zu den Kräften K gezeichnetes Seileck. Letzteres gilt auch für den Ruhezustand der Keile, nur liegt dann der Pol nicht mehr bestimmt fest, sondern ist innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Für die Seileckseiten gelten dann dieselben Beschränkungen wie auf S. 237 angegeben.

Bei einer Keilpresse etwa zum Auspressen von Öl aus zerstampftem Ölsamen (Fig. 293) wirkt K_1 als Triebkraft auf den mittleren Keil vom Keilwinkel $2\,\delta$. Durch Niederdrücken dieses Keiles werden die Seitenkeile auf den wagerechten Gleitflächen auseinander getrieben und dadurch die Ölgutsäcke S, S gepreſst, welche dabei die Gegendrücke K_2 leisten. $ACEFB$ ist die Drucklinie der Keilgruppe. Stellt man die Triebkraft K_1 durch GJ im Krafteck (Fig. 294) dar, so sind JO und GO die Gegendrücke D der beiden Seitenkeile, welche von der Wagerechten um $\delta + \varphi$ abweichen. Dadurch ist der Pol O bestimmt. Die Widerstände W der wagerechten Gleitflächen bilden mit der Lotrechten die Winkel φ und legen dann mit den Wagerechten durch G und J die Punkte L und M fest, wodurch $JL = GM = K_2$ bestimmt werden. Es ist dann im Dreieck OGJ:

Fig. 293.

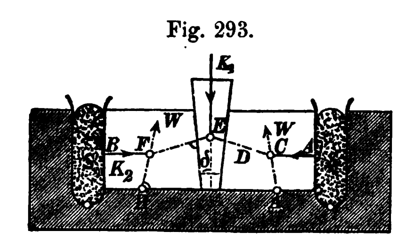
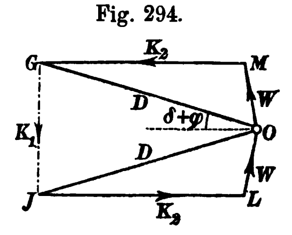


Fig. 294.



$$K_1 : D = 2 \cdot \sin(\delta + \varphi),$$

im Dreieck OGM aber, weil $\measuredangle\, GOM = 90^0 - (\delta + 2\,\varphi)$:

$$K_2 : D = \cos(\delta + 2\,\varphi) : \cos\varphi,$$

mithin wird

$$1)\qquad \frac{K_1}{K_2} = 2\,\frac{\sin(\delta + \varphi)\cos\varphi}{\cos(\delta + 2\,\varphi)}.$$

Weil beim Keile gewöhnlich $\operatorname{tg}\delta$ gegeben ist, kann man vorstehende Formel zur bequemeren Berechnung (ohne trigonometrische Tabellen) umformen, indem man die zusammengesetzten Funktionen auflöst und in Zähler und Nenner mit $\cos\delta \cdot \cos^2\varphi$ teilt:

$$2)\qquad \frac{K_1}{K_2} = 2\,\frac{\operatorname{tg}\delta + f}{1 - f^2 - 2f\operatorname{tg}\delta}.$$

l) Wirkungsgrad einer Maschine.

Zur Beurteilung der Güte einer Maschine dient die Vergleichung der Arbeiten, welche von der Maschine übertragen bezw. aufgenommen werden. Der Zweck der Keilpresse z. B. besteht in

dem Zusammenpressen des Gutes bei S. Rückt nun jeder Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ nach aufsen, während der Treibkeil sich um c abwärts bewegt, so verrichten die auf das Gut übertragenen Kräfte K_2 zusammen eine Arbeit $K_2 v$. Dies ist die Nutzarbeit; $K_1 c$ ist aber der Arbeitsaufwand. Das Verhältnis beider, nämlich

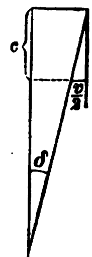
3) $$\eta = \frac{\textbf{Nutzarbeit}}{\textbf{Arbeitsaufwand}} = \frac{K_2 v}{K_1 c},$$

nennt man den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Maschine.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten v und c findet man aus dem geometrischen Zusammenhange der Maschine (Fig. 295). Rückt der Treibkeil um c abwärts, so drängt er jeden Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ zur Seite, wo $\frac{1}{2}v = c \operatorname{tg} \delta$. Daher ist hier

4) $$\eta = \frac{2 K_2}{K_1} \operatorname{tg} \delta .$$

Fig. 295.



Einen anderen Ausdruck kann man noch für den Wirkungsgrad η finden, wenn man sich die Maschine einmal ohne schädliche Reibungswiderstände, als eine ideelle, vollkommene Maschine vorstellt. Nennt man die für eine solche nötige Betriebskraft die ideelle Triebkraft $= K_0$, so wird, indem man in Gl. 2 $f = 0$ setzt,

5) $$\frac{K_0}{K_2} = 2 \operatorname{tg} \delta = \frac{v}{c}.$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so erhält man

6) $$\eta = \frac{K_0}{K_1} = \frac{\textbf{ideelle Triebkraft}}{\textbf{wirkliche Triebkraft}}.$$

Nach Gl. 5 ist $K_0 c = K_2 v$, d. h. bei einer vollkommenen Maschine würden Arbeitsaufwand und Nutzarbeit einander gleich oder der Wirkungsgrad gleich Eins sein. Eine Maschine ist mechanisch um so vollkommener, je mehr sie sich diesem ideellen Zustande nähert. Die Beziehung $K_0 c = K_2 c$ haben wir nur für den besonderen Fall der Keilpresse bewiesen; sie gilt aber allgemein. Bewegen sich nämlich alle Teile einer Maschine gleichförmig, so findet keine Zunahme des Arbeitsvermögens statt, also mufs auch die gesamte Arbeit Null sein. Die inneren Spannkräfte einer vollkommenen Maschine verrichten aber nach S. 168 keine Arbeit. Die Widerstände völlig glatter Flächen, mit denen die einzelnen Maschinenteile ineinander

greifen und aneinander gleiten, ebensowenig. Die Nutzlast wirkt in Bezug auf die Maschine stets der Bewegung ihres Angriffspunktes entgegen, verrichtet daher eine negative Arbeit, die im absoluten Sinne der Arbeit der Triebkraft gleich sein mufs. Also

$$7) \qquad v : c = K_0 : K_2 .$$

Dies ist der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit (oder an Weg) verloren.“ Man kann also den Wirkungsgrad nach Willkür auf Grund der Gl. 3 oder der Gl. 6 berechnen.

Beispiel: Die Reibungsflächen der Keilpresse seien gut geglättet und geschmiert, daher $f = 0{,}1$. Auch in diesem Fall ist es nützlich, den Treibkeil selbstsperrend anzuordnen; dies ist erfüllt, wenn wir etwa $\operatorname{tg}\delta = 1/20$ annehmen. In Gl. 2 werden dann die Gröfsen f^2 und $2f\operatorname{tg}\delta$ nur je $1/100$ und können zur Vereinfachung gegen 1 vernachlässigt werden. Es ist nämlich zu bedenken, dafs die Reibungsziffern in Wirklichkeit schwanken werden und selten mit grofser Genauigkeit zu schätzen sind. Daher ist in Gl. 2 der Zähler doch kaum auf 2 % genau zu berechnen, so dafs die Vernachlässigung im Nenner durchaus zulässig erscheint. Ähnliches gilt in allen Fällen, in denen Reibungswiderstände eine wichtige Rolle spielen. Dann wird

$$K_1 = 2 \cdot (0{,}05 + 0{,}1)\, K_2 = 0{,}3\, K_2 ; \quad v = 2\, c \cdot 0{,}05 = 0{,}1 \cdot c .$$

Der Wirkungsgrad $\eta = \frac{K_2 v}{K_1 c} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = 1/3$. Es würde ohne Reibung

$$K_0 = 2\, K_2 \operatorname{tg}\delta = 0{,}1\, K_2 ,$$

also auch $\eta = \frac{K_0}{K_1} = \frac{0{,}1\, K_2}{0{,}3\, K_2} = 1/3$, wie vorstehend.

Bei dieser Maschine wird also von der aufgewandten Arbeit nur ein Drittel nützlich verwertet, während zwei Drittel durch Reibung aufgezehrt werden. Die Keilpresse ist daher eine wenig vollkommene Maschine; Wasserdruckpressen z. B. arbeiten erheblich vorteilhafter. Die soeben besprochene Maschine hat aber Einfachheit und Billigkeit als Vorzüge.

Der Wirkungsgrad dieser Maschine nach Gl. 6 läfst sich, wenn man in Gl. 2 die erwähnte Vereinfachung

$$K_1 = 2\, K_2 (\operatorname{tg}\delta + f)$$

einführt, auch schreiben, weil $K_0 = 2\, K_2 \operatorname{tg}\delta$ ist,

$$8) \qquad \eta = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta + f} = \frac{1}{1 + \frac{f}{\operatorname{tg}\delta}} .$$

Vergröfsert man $\operatorname{tg}\delta$, so verkleinert sich der Nenner, mithin wächst η. Macht man z. B. $\operatorname{tg}\delta = f$, so würde schon $\eta = 1/2$ werden. Die beabsichtigte Selbstsperrung des Triebkeiles hat also den geringen Wirkungsgrad herbeigeführt. Es läfst sich zeigen, dafs bei jeder Maschine, die selbstsperrend

sein soll, der Wirkungsgrad unter 0,5 liegen mufs. Man kann nämlich setzen: $K_1 = K_0 + F$, wenn F der durch die Reibungswiderstände aufgezehrte Teil der Betriebskraft ist. Nimmt man nun an, dafs beim Beginne der rückgängigen Bewegung der Reibungswiderstand annähernd noch dieselbe Gröfse F behält, so gilt für den Rückgang $K_1' = K_0 - F$. Soll also die Maschine selbst sperren, so mufs $K_1' \leqq 0$, mithin $F \geqq K_0$ oder

$$K_1 \geqq 2\,K_0 \quad \text{sein, d. h.} \quad \eta = \frac{K_0}{K_1} \leqq \frac{1}{2}.$$

m) Drucklinie eines Gewölbes.

Auf S. 236 wurde gezeigt, dafs die Drucklinie einer ruhenden Gruppe von zwei Keilen statisch unbestimmt ist, dafs sie ein Seileck zu den Lasten K der Keile sein mufs und dafs ihre Seiten an zwei beschränkende Bedingungen gebunden sind. Auf S. 238 wurde dann weiter erläutert, dafs diese Sätze von der Zahl der Keile unabhängig sind, also auch bei beliebig vielen Keilen Gültigkeit behalten.

Die einzelnen Steine eines (ohne Mörtel gedachten) Gewölbbogens sind nun auch keilförmige Körper. Soll ein Gewölbbogen in Ruhe sein können, so mufs eine dem Ruhezustand entsprechende Drucklinie nachweisbar sein. Die Drucklinie ist ein zu den Gewichten der Gewölbteile gezeichnetes Seileck. Die einzelnen Seiten desselben dürfen höchstens um den Reibungswinkel von den Normalen zu den Fugen abweichen und müssen die Fugen auch innerhalb des Bereiches der Berührung, d. h. innerhalb des Gewölbbogens schneiden.

Das Gewölbe möge symmetrisch zu einer lotrechten Mittelebene sein (auch bezüglich seiner Belastung). Betrachten wir diese Ebene als eine Schnittebene, so wird in ihr eine wagerechte Druckkraft, der Seitenschub H, wirken. Denn ein schräg gerichteter Scheiteldruck würde an der einen Hälfte nach oben, an der anderen aber zufolge des Gesetzes der Wechselwirkung nach unten gerichtet sein, was jedoch der Symmetrie widerspricht. Teilt man nun den halben Bogen (Fig. 296) durch Fugen in eine beliebige Zahl von Teilen, deren Gewichte Q_1, Q_2, ... durch die Schwerpunkte der Teile hindurchgehen, so ist das Krafteck der Lasten Q leicht gezeichnet, indem man sie nach irgend einem Kräftemafsstab aneinander reiht. Wäre nun der Seitenschub H bekannt, so würde man den Pol O in dem Abstande H dem oberen Endpunkte der Lasten gegenüber annehmen und hätte damit sämtliche Polstrahlen. Wäre aufserdem noch der Angriffspunkt C des Scheiteldruckes gegeben, so hätte man die Seileckseiten nur den

Polstrahlen der Reihe nach parallel zu ziehen und hätte damit das Seileck, d. h. die Drucklinie des Gewölbes. Den Punkt C wollen wir in der Mitte der Scheitelfuge annehmen. Die letzte Seite des Seilecks könnte nun vielleicht aus der inneren Leibung des Gewölbes treten; dann erkennt man, dafs dieses Seileck eine mögliche Drucklinie nicht ist. Um aber ein flacher verlaufendes Seileck zu erhalten, braucht man nur den Polabstand H zu vergröfsern, und zwar kann man leicht H so bestimmen, dafs die letzte Seite die Kämpferfuge an einer bestimmten Stelle A, etwa in ihrer Mitte, schneide. In Fig. 296 ist nach willkürlicher Annahme des Poles O_1 das Seileck CA_1 gezeichnet. Verlängert man nun die letzte Seite des ersten Seilecks bis zum Schnitte P mit der Richtungslinie von H, so mufs nach S. 106 das Gesamtgewicht R der Gewölbhälfte durch P gehen. Die Lage von R ist nur von der Form des Gewölbes abhängig, nicht aber von der willkürlich angenommenen Lage des Poles O. Für ein gröfseres H und für ein wiederum durch C gehendes Seileck mufs daher die letzte Seite ebenfalls durch P gehen. Zieht man also PA, so ist dies die Richtung der letzten Seite durch den gewünschten Punkt A. Eine Parallele zu AP durch D bestimmt den neuen Pol O, und OB ist nun der Scheitelschub, welcher einem durch C und A gehenden Seileck entspricht. Dafs die Seiten des Seilecks von den Normalen zu den Fugen nicht zu viel abweichen, läfst sich ja nötigenfalls durch Änderung der Fugenrichtung leicht erreichen. Wichtiger ist, dafs die Drucklinie überall im Gewölbbogen verbleiben mufs. Nur wenn sich eine solche Drucklinie finden läfst, ist der Ruhezustand möglich.

Fig. 296.

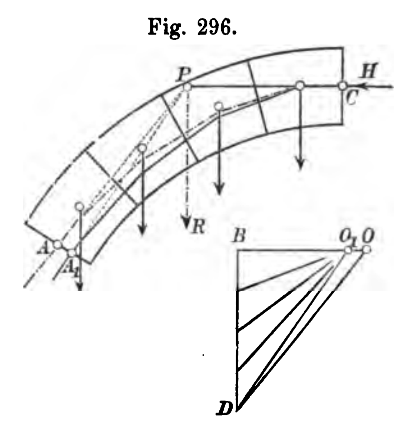
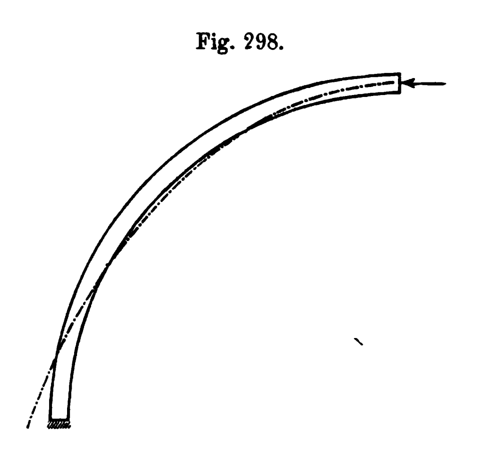


Fig. 297.

Wie schon gesagt, hat man, wenn das erste Seileck die innere Wölbfläche schneidet, H zu vergröfsern, oder C nach oben zu verschieben, und umgekehrt. In Fig. 297 sind 2 vorläufige Seilecke

eingezeichnet, die den Bedingungen einer Drucklinie noch nicht entsprechen, aber durch Veränderung von H zu möglichen Drucklinien umgewandelt werden können. Schneidet jedoch ein Seileck (Fig. 298) erst die innere Wölblinie, kehrt dann durch dieselbe in das Gewölbe zurück und geht bei weiterem Verlaufe noch einmal durch die äufsere Wölblinie, so ist Gleichgewicht unmöglich. Denn jede Änderung von H und C, die an der einen Stelle das Hinaustreten beseitigen könnte, müfste das Hinaustreten an der anderen Stelle noch verstärken; in solchem Falle kann nur eine Vergröfserung der Gewölbstärke oder eine Änderung der Gewölbform zum Ziele führen.

Fig. 298.



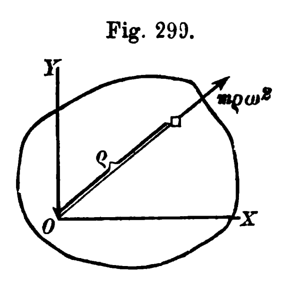
Auf diese Andeutungen über die Drucklinie in Gewölben müssen wir uns hier beschränken. Die wirkliche Lage des Scheitelschubes H und des Widerlagerdrucks W folgt aus dem elastischen Verhalten der Gewölbsteine und findet sich besprochen in Keck, Vorträge über Elastizitätslehre, S. 330 u. ff. Hat man aber die richtige Drucklinie gefunden, so geben die Polstrahlen des Kraftecks die Gröfse der Druckkräfte in den einzelnen Fugen an.

11. Wirkung der Reibung bei gleichmäfsig sich drehenden Körpern.

Ein starrer Körper, der sich gleichförmig um eine feste Achse dreht, ist nicht im Gleichgewichte, weil die einzelnen Massenteilchen nicht geradlinige, sondern kreisförmige Bewegungen ausführen. Die Bedingungen für eine gleichförmige Drehbewegung lassen sich aber mit Hülfe des Satzes auf S. 164 aufstellen, wonach die Ergänzungskräfte den an dem Körper wirkenden äufseren Kräften das Gleichgewicht halten müssen.

Dreht sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 299), so erfährt ein Massenteilchen m im Abstande ϱ von der Achse nach S. 88, Gl. 1 die Zentripetalbeschleunigung $\varrho\omega^2$; daher müssen sämtliche Zentrifugalkräfte $m\varrho\omega^2$ den äufseren Kräften das Gleichgewicht halten. Die äufseren Kräfte bestehen in bewegenden Kräften K, in den Normalwiderständen N der festen Achse O und in Reibungswiderständen der Lager der Drehachse. Da die Zentrifugalkräfte sämtlich durch O hindurchgehen, so haben sie in Bezug auf die Achse das Moment Null. Gleiches mufs also auch für die äufseren Kräfte gelten. Da nun die Normalwiderstände N ebenfalls durch O gehen, so ergibt sich als wesentliche Bedingung der gleichförmigen Drehung, dafs die Momentensumme der bewegenden Kräfte K und der Reibungswiderstände $f \cdot N$ in Bezug auf O zusammen Null betrage.

Fig. 299.



Die Normalwiderstände N der festen Drehachse sind im allgemeinen von der Massenverteilung des Körpers abhängig und werden erst weiter unten eingehend bestimmt werden. Jetzt wollen wir nur solche Fälle betrachten, bei denen die Masse derartig symmetrisch um die Achse verteilt ist, dafs jedem Massenteilchen im Abstande ϱ auf der einen Seite der Achse ein gleiches Massenteilchen in demselben Abstand auf der anderen Seite entspricht, so dafs die Zentrifugalkräfte dieser Massenteilchen sich gegenseitig aufheben, weshalb dann auch die sämtlichen äufseren Kräfte sich vollständig aufheben, d. h. den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen. Aus diesem Grunde können die Fälle der gleichmäfsigen Drehung solcher Körper mit symmetrischer Massenverteilung schon an dieser Stelle, d. h. in der Gleichgewichtslehre, behandelt werden.

In den obigen Bedingungen wird nichts geändert, wenn zu der Drehung um die Achse O noch eine geradlinige und gleichmäfsige Verschiebung des Körpers mit seiner Achse kommt. Denn eine derartige Verschiebung bedingt keine Beschleunigung, also auch keine Ergänzungskräfte.

a) Reibungsmoment eines Tragzapfens.

Eine Achse sei rechtwinklig zu ihrer Mittellinie belastet und stütze sich mittels zylindrischer Zapfen auf zylindrische Lager, welche die Zapfen mit geringem Spielraum umschliefsen. Auf einen Zapfen vom Halbmesser r komme ein durch die Zapfenmitte gehender Zapfendruck D, der rechtwinklig zur Längenachse des Zapfens steht, so dafs die Zylinderfläche des Zapfens den Druck bekommt. Ein derartiger Zapfen heifst Tragzapfen.

Wir betrachten zuerst einen sog. eingelaufenen Tragzapfen (Fig. 300), der mit merklichem Spielraum im Lager liegt und bei dem man annäherungsweise annehmen kann, die Berührung mit dem Lager finde nicht in einer gröfseren Fläche, sondern in einer Seite des Zylinders (in der Figur durch einen Punkt dargestellt) statt. Im Ruhezustande würde A die Berührungsstelle sein. Dreht sich nun aber der Zapfen rechts herum, so gleitet bei A der Zapfen nach links; dem setzt sich der Widerstand fN nach rechts entgegen. Das Moment $fN \cdot r$ macht ein treibendes, die Reibung überwindendes Kräftepaar $\mathfrak{M} = fNr$ im Sinne der Drehung nötig. Aber auch nach Anbringung desselben ist den Gleichgewichtsbedingungen noch nicht genügt, weil die Summe der wagerechten Kräfte nicht Null ist. Es kann daher im Zustande der Bewegung die Berührung nicht in A stattfinden; vielmehr verschiebt sich die Berührungsstelle nach rechts bis zu einem Punkte B (Fig. 301), der so liegt, dafs dort die Mittelkraft W aus N und fN lotrecht gerichtet ist. Dies findet statt für $\measuredangle AOB = \varphi$. Es wird dann $W = D$, und beide bilden ein dem treibenden Moment $\mathfrak{M}$ widerstehendes Kräftepaar $Dr \sin \varphi = \mathfrak{M}$.

Fig. 300.

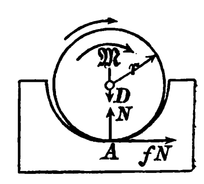
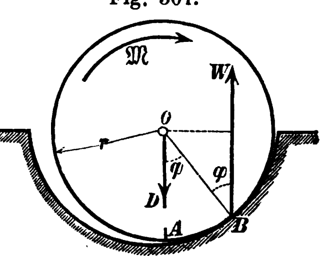


Fig. 301.



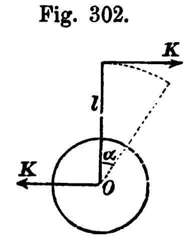
Nun ist $\operatorname{tg} \varphi = f$; weil aber bei geschmierten Drehzapfen, wie wir sie hier voraussetzen, fast stets $f \leq 0{,}1$ also $\varphi \leq 6^0$ und $\cos \varphi \geq 0{,}995$, so ist bei derartig kleinen Winkeln $\sin \varphi$ mit

genügender Annäherung gleich $\operatorname{tg}\varphi = f$ zu setzen, so dafs das für die gleichförmige Drehung erforderliche Kraftmoment, welches zugleich das Reibungsmoment bezeichnet, gesetzt werden darf

$$1) \qquad \mathfrak{M} = Dfr.$$

Es entspricht z. B. $f = 0{,}1$ dem Werte $\sin\varphi = 0{,}0995$. Unmittelbar ergibt sich Gl. 1 aus Fig. 300, wenn man daselbst, ohne Rücksicht auf den kleinen Verstofs gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte, $N = D$ also $fN = fD$ einführt. Man denke sich also, um die Gl. 1 leicht zu merken, dafs der Zapfendruck D eine Reibung fD und mit dem Hebelarm r ein Moment Dfr bedingt. Bringt man das Moment $\mathfrak{M}$ auf die Form Kl (Fig. 302), legt die eine Kraft durch O, die andere ans Ende eines Halbmessers l und läfst sich die Kräfte K bei der Drehung stets mitdrehen, so verrichtet die in O angreifende Kraft keine Arbeit; die am Endpunkte des Armes l aber während eines Drehungswinkels α die Arbeit $Kl\alpha = \mathfrak{M}\alpha$. Es ist also **die Arbeit eines Kräftepaares gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel.** Die Zapfenreibung erfordert hiernach einen sekundlichen Arbeitsaufwand $= \mathfrak{M}\omega = Dfr\omega$.

Fig. 302.



Als Arbeitseinheit dient das Meterkilogramm. Bei regelmäfsig umlaufenden Maschinen pflegt man aber **die in jeder Sekunde geleistete Arbeit** in ^{mkg} als Leistung, Arbeitsstärke oder Effekt $= E$ zu bezeichnen. Die Einheit der Leistung ist das Sekunden-Meterkilogramm $= 1^{\text{mkg}}/_{\text{sek}}$. Als gröfsere Einheit hat man die **Pferdestärke** $(PS) = 75^{\text{mkg}}/_{\text{sek}}$ eingeführt.

Ein lebendes Pferd leistet freilich eine sekundliche Arbeit von 75^{mkg} nur unter günstigen Umständen. Als aber James Watt i. J. 1782 Dampfmaschinen für Londoner Brauereien zu bauen hatte, kam es darauf an, diejenige Arbeit, die bisher von Pferden am Göpel verrichtet wurde, durch die Maschine leisten zu lassen. Watt mafs daher die von den Pferden geleistete Arbeit, und eine Dampfmaschine, welche die Leistung von 10 Pferden ersetzte, wurde eine 10pferdige Maschine genannt. Die dort benutzten Pferde waren sehr kräftig; auch wird Watt der Sicherheit wegen, damit seine Dampfmaschine keinen Mifserfolg erleide, die Arbeit der Pferde eher zu hoch als zu niedrig geschätzt haben. Auf diese Weise hat sich als Maschinen-Pferdestärke die Leistung von $75^{\text{mkg}}/_{\text{sek}}$ eingebürgert. Es wird dafür auch nicht selten

Pferdekraft gesagt; doch ist diese Bezeichnung wenig passend, da man mit dem Ausdrucke doch nicht eine Kraft, sondern eine sekundliche Arbeit bezeichnen will.

Für die Anzahl der Pferdestärken wird das Zeichen N benutzt, während n die Zahl der Umdrehungen in einer Minute bedeutet.

Beispiel: Ein Wasserrad wiege einschl. des darin befindlichen Wassers 10000 kg; seine Achse werde durch zwei Zapfen von $r = 0{,}1$ m Halbmesser getragen und mache 10 Umdrehungen in der Minute. Nimmt man $f = 0{,}1$ an, so ist, da die Summe der Zapfendrücke an beiden Tragzapfen 10000 kg beträgt, das gesamte Reibungsmoment $\mathfrak{M} = 10000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 100$ mkg. Bei $n = 10$ ist der Drehungswinkel in der Minute $20\,\pi$, in der Sekunde also $20\,\pi : 60 = {}^1\!/_3\,\pi = 1{,}047$, daher die sekundl. Reibungsarbeit $E = 104{,}7$ mkg/sek und der Reibungsverlust in Pferdestärken $N = 104{,}7 : 75 = 1{,}396\ PS$.

Bei einem neuen Tragzapfen findet die Berührung längs einer größeren, dem Mittelpunktswinkel $2\,\alpha$ entsprechenden Fläche ACB statt (Fig. 303). Ist l die Länge des Zapfens und p der Druck für die Flächeneinheit an irgend einer Stelle, so kommt auf ein Teilchen $l \cdot ds$ der Zylinderfläche die Druckkraft $pl \cdot ds$ und die Reibung $fpl \cdot ds$. Das treibende Moment muß dann betragen

Fig. 303.

$$\mathfrak{M} = flr \int p \cdot ds.$$

Macht man die Voraussetzung, daß der Zapfen überall gleich stark anliege, so wird

$$\mathfrak{M} = fplr \int ds = 2\,fplr^2\alpha.$$

Nun muß aber $\quad D = pl \int \cos\vartheta \cdot ds$

sein, oder, weil $ds \cos\vartheta = dx$

$$D = pl \int dx.$$

Darin ist $\int dx$ die Sehne $AB = 2r \sin\alpha$, mithin

$$D = 2\,plr \sin\alpha.$$

Dann wird $\dfrac{\mathfrak{M}}{D} = fr \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$ oder

$$2)\qquad \mathfrak{M} = fDr \frac{\alpha}{\sin\alpha} = fDr \frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}}.$$

Hiernach ist beim neuen Zapfen, weil wegen des teilweise keilförmigen Einpressens die Summe der Normaldrücke größer ist als D,

auch die Reibung gröfser als beim eingelaufenen Zapfen, u. zw. im Verhältnisse des Bogens zur Sehne.

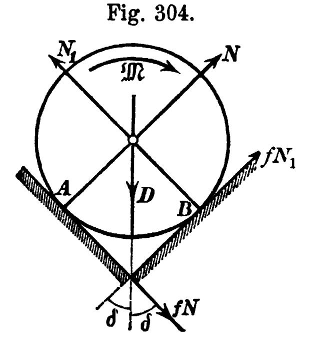
$$\alpha = 0 \text{ gibt wieder } \mathfrak{M} = Dfr;$$
$$\alpha = {}^1\!/_2\pi \text{ aber } \mathfrak{M} = Dfr\,{}^1\!/_2\pi = 1{,}57\,Dfr.$$

Die Reibungswiderstände geben, nach senkrechter oder wagerechter Richtung zerlegt, Seitenkräfte, die in senkrechter Richtung die Summe Null liefern, in wagerechter Richtung aber nicht. Daher besteht bei vorstehender Ableitung ein ähnlicher kleiner Verstofs gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte wie bei Benutzung der Fig. 300 zur schnellen Entwickelung der Gl. 1.

Eine diesen Umstand berücksichtigende schärfere aber umständlichere Behandlung ergibt wiederum, dafs für f eigentlich $\sin\varphi$ gesetzt werden müfste.

Beim Tragzapfen im Keillager (Fig. 304) werden die beiden Reibungswiderstände fN und fN_1 wiederum die Zapfen einseitig nach rechts hinüber drücken, infolgedessen N_1 etwas $> N$ sein mufs. Nimmt man aber trotzdem annäherungsweise $N_1 = N$ an, so ergibt sich in lotrechter Richtung

Fig. 304.



$$2N\sin\delta = D, \text{ also } 2N = \frac{D}{\sin\delta},$$

$$\text{3)} \qquad \text{und } \mathfrak{M} = 2fNr = \frac{Dfr}{\sin\delta}.$$

Der Ersatz des eingelaufenen zylindrischen Lagers (Gl. 1) durch das Keillager bewirkt daher, dafs wegen des keilförmigen Einpressens $\mathfrak{M}$ gröfser wird als beim zylindrischen Lager, dafs man aber, wie bei der Bewegung in Keilnuten (S. 221), statt f einfach den gröfseren Wert $f:\sin\delta$ zu setzen hat. $\delta = 30^0$ gibt $f:\sin\delta = 2f$, entsprechend einer Verdoppelung des Reibungsmoments.

Mit Rücksicht auf den Unterschied zwischen N und N_1 mufs stattfinden

1. in wagerechter Richtung
$$0 = N\cos\delta + fN\sin\delta - N_1\cos\delta + fN_1\sin\delta;$$
2. in senkrechter Richtung
$$D = N\sin\delta - fN\cos\delta + N_1\sin\delta + fN_1\cos\delta;$$
3. $\mathfrak{M} = f(N + N_1)\,r$.

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich ordnen:

$$0 = -(N_1 - N)\cos\delta + (N + N_1) f \sin\delta$$
$$D = (N_1 - N) f \cos\delta + (N + N_1)\sin\delta.$$

Multipliziert man die erstere dieser Gleichungen mit f, so entsteht durch Zusammenzählen

$$D = (N + N_1)(1 + f^2)\sin\delta \text{ und nach Gl. 3}$$
$$\mathfrak{M} = \frac{D f r}{\sin\delta(1 + f^2)}.$$

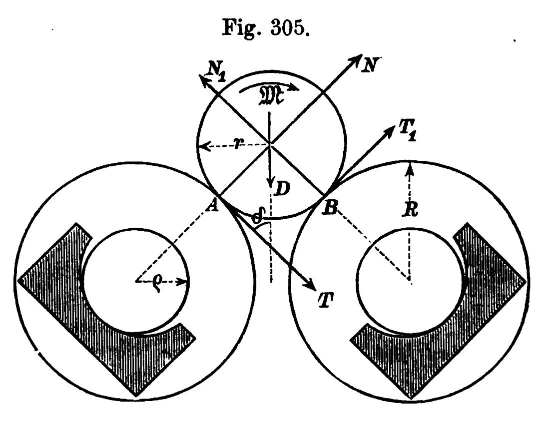
$$\text{Darin ist } \frac{f}{1+f^2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos^2\varphi = \sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$
$$\text{also } \mathfrak{M} = D r \frac{\sin 2\varphi}{2\sin\delta}.$$

Bei $f = 0{,}1$ kann aber f^2 gegen 1 vernachlässigt oder $\sin 2\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi$ gesetzt werden, so dafs dann wieder als Annäherung Gleichung 3 entsteht.

Dem Nachteile der Vergröfserung der Reibung durch Benutzung des Keillagers steht der Vorteil gegenüber, dafs der Zapfen im Keillager auch nach erfolgter Abnutzung immer noch eine genaue Führung findet, während er im eingelaufenen zylindrischen Lager um das Mafs des Spielraumes hin und her schleudern kann. Das Keillager wird deshalb besonders bei Mefs-Instrumenten angewandt, bei denen es mehr auf sichere Lage als auf Kleinheit der Reibung ankommt.

Die Lagerung auf **Reibungsrollen** (Fig. 305) von möglichst grofsem Halbmesser R, welche sich um Zapfen vom Halbmesser ϱ drehen, hat den Zweck der Verminderung des Reibungsmomentes. Der obere Zapfen vom Halbmesser r erfährt von den Rollen bei A und B die Normaldrücke N und N_1. An den Berührungsstellen A und B findet aber kein Gleiten statt, vielmehr haben die Rollen dort dieselbe Umfangsgeschwindigkeit wie die Zapfen; daher treten an diesen Stellen nicht die Gleitwiderstände fN und fN_1 auf, sondern Reibungswiderstände T und T_1, die im allgemeinen kleiner sind. Es wird

Fig. 305.



$$\mathfrak{M} = (T + T_1) r.$$

Die Kräfte T und T_1 wirken auf die Rollen in entgegengesetztem Sinne wie auf den Zapfen und bewirken die gleichmäfsige Drehung der Rollen, haben also deren Zapfenreibung zu überwinden.

Die tatsächliche Ungleichheit von N und N_1 würde in derselben Weise sich geltend machen wie im vorigen Falle; sie hat auf das wirkliche Ergebnis keinen nennenswerten Einflufs, soll daher der Einfachheit wegen vernachlässigt werden.

Die Kräfte $N = N_1$ bilden (ebenfalls umgekehrt) die Zapfendrücke in den Lagern der Rollen, erzeugen dort die Reibungsmomente $Nf\varrho$ und müssen durch die Momente der Umfangskräfte $T = T_1$ überwunden werden. Daher wird $TR = Nf\varrho$, $T = Nf\frac{\varrho}{R}$ und $\mathfrak{M} = 2\,Nf\frac{\varrho}{R}r$. Am Zapfen liefert aber die Gleichung der lotrechten Kräfte wieder $D = 2\,N\sin\delta$, wennn δ der Winkel ist, den die Tangenten in A und B mit der lotrechten Mittellinie bilden; hiernach wird

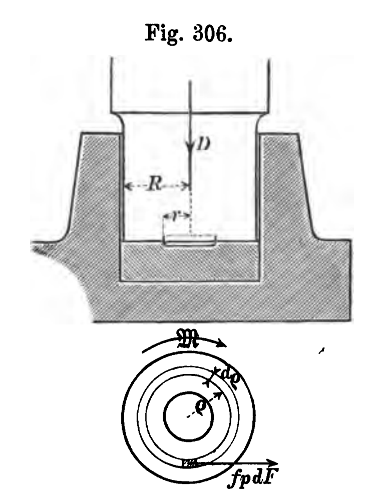
$$\mathfrak{M} = \frac{Dfr}{\sin\delta}\,\frac{\varrho}{R}. \tag{4}$$

Damit dies kleiner werde als Dfr, mufs $\varrho : R < \sin\delta$ sein. $\sin\delta = \frac{1}{2}$ und $\frac{\varrho}{R} = \frac{1}{6}$ geben beispielsweise $\mathfrak{M} = \frac{1}{3}Dfr$.

b) Reibungsmoment eines Stützzapfens.

Beim Stütz- oder Spurzapfen (Fig. 306) wirkt der Druck D in der Achsenrichtung desselben. Die Berührung mit der Spurplatte des Lagers erfolge (der Allgemeinheit wegen) in einer Ringfläche von den Halbmessern r und R. Zeichnet man im Grundrifs einen schmalen Ring vom Halbmesser ϱ und der Breite $d\varrho$, so kommt auf ein Teilchen dF desselben eine Druckkraft $p \cdot dF$, wenn p der Druck für die Flächeneinheit ist. Diese Druckkraft liefert eine Reibung $fp \cdot dF$ und ein Reibungsmoment $d\mathfrak{M} = fp \cdot dF \cdot \varrho$. Da man annehmen darf, dafs im ganzen Umkreise dieses Ringes der Einheitsdruck p denselben

Fig. 306.



Wert haben wird, so kann man dF sogleich als die Ringfläche $2\varrho\pi\cdot d\varrho$ einführen und erhält als gesamtes Reibungsmoment

1) $$\mathfrak{M} = 2\,\pi f \int_r^R p\varrho^2 d\varrho.$$

Aufserdem mufs, da der schmale Ring den Druck $p\,2\,\pi\varrho\cdot d\varrho$ aufnimmt,

2) $$D = 2\,\pi \int_r^R p\varrho\cdot d\varrho \quad \text{sein.}$$

Beim neuen Zapfen nimmt man den Druck p überall gleich an, daher $p = \frac{D}{(R^2 - r^2)\pi}$ und

3) $$\mathfrak{M} = \frac{2\,Df}{R^2 - r^2}\int_r^R \varrho^2 d\varrho = \frac{2}{3}Df\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Ist die Berührungsfläche ein voller Kreis $(r = 0)$, so wird

4) $$\mathfrak{M} = \frac{2}{3}DfR,$$

also kleiner als beim Tragzapfen. Es kommt dies daher, dafs, während beim Tragzapfen die ganze Reibung Df an dem vollen Halbmesser als Hebelarm wirkt, hier die Hebelarme der Reibungswiderstände im allgemeinen kleiner sind als der äufsere Halbmesser.

Beim eingelaufenen Zapfen sind die Verhältnisse noch günstiger. Mit der gleitenden Bewegung des Zapfens ist nämlich eine Abnutzung, ein fortwährendes Abschleifen, verbunden, und, da die Gleitgeschwindigkeit nach dem äufseren Umfange hin zunimmt, so wird auch hier die Abnutzung am gröfsten ausfallen; infolgedessen wird das Aufliegen des Zapfens auf der Spurplatte nach einiger Zeit nicht mehr ein gleichmäfsiges sein; es wird der Einheitsdruck von innen nach aufsen hin abnehmen. Über die Veränderlichkeit von p wird die Annahme gemacht, dafs p mit ϱ umgekehrt proportional sei, dafs man

5) $$p = \frac{p_1}{\varrho}$$

setzen könne, worin p_1 der Einheitsdruck im Abstand Eins von der Drehachse ist. Dann wird aus Gl. 2:

$$D = 2\,\pi p_1 \int_r^R d\varrho = 2\,\pi p_1\,(R - r),$$

aus Gl. 1 aber:

$$\mathfrak{M} = 2\pi f p_1 \int_r^R \varrho \cdot d\varrho = \pi f p_1 (R^2 - r^2).$$

Teilt man diese Gleichung durch die vorhergehende, so wird

$$\mathfrak{M} : D = {}^1/_2 f (R + r) \quad \text{also}$$

6) $$\mathfrak{M} = {}^1/_2 D f (R + r).$$

Es ist jetzt offenbar $^1/_2 (R + r)$ der mittlere Hebelarm der Reibung. Für volle Kreisfläche ($r = 0$) wird

7) $$\boldsymbol{M} = {}^1/_2 \boldsymbol{D f R}.$$

Beim kegelförmigen Stützzapfen (Fig. 307) möge die Berührungsfläche sich von C bis B erstrecken. Ist dF ein Flächenteilchen derselben mit dem Einheitsdrucke p, so wird $\mathfrak{M} = f \int p \cdot dF \cdot \varrho$. Da aber $p \cdot dF$ mit der Wagerechten den Winkel δ bildet, so ist

Fig. 307.

$$D = \sin\delta \int p \cdot dF.$$

Das Flächenteilchen dF bildet mit der wagerechten Grundrifsebene den Winkel $90^0 - \delta$; nennt man dF' den Grundrifs von dF, so wird $dF' = dF \cos(90^0 - \delta) = dF \sin\delta$. Hiernach wird

$$D = \int p \cdot dF' \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{f}{\sin\delta} \int p \cdot dF' \varrho.$$

Da nun dF' mit $2\varrho\pi \cdot d\varrho$ eingeführt werden kann, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi f}{\sin\delta} \int_r^R p \varrho^2 p \varrho \quad \text{und}$$

$$D = 2\pi \int_r^R p \varrho \cdot d\varrho.$$

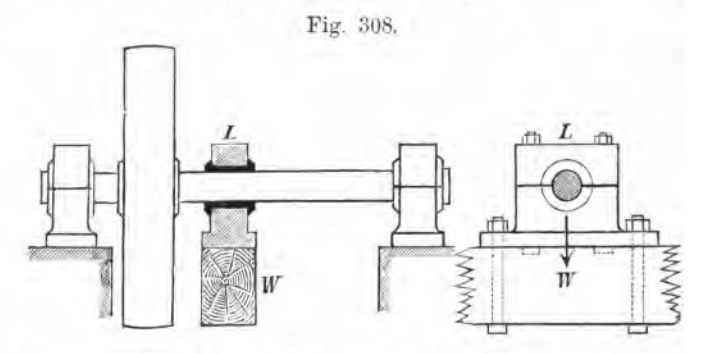
Vergleicht man diese Werte mit den Gl. 1 und 2, so erkennt man, dafs der Ausdruck für D völlig mit Gl. 2 übereinstimmt, während in dem Werte für $\mathfrak{M}$ nur f mit $f : \sin\delta$ vertauscht ist als Folge des kegelförmigen Einpressens, wie in allen ähnlichen Fällen. Daher mufs sowohl in den Gl. 3 und 4 für einen neuen Zapfen, sowie auch in den Gl. 6 und 7 für den eingelaufenen Zapfen f vertauscht werden mit $f : \sin\delta$.

Der kegelförmige Zapfen verursacht also mehr Reibung als der zylindrische Stützzapfen, gewährt aber auch, wie das Keillager, den Vorteil einer genauen Führung, die der Stützzapfen mit ebener Reibungsfläche nicht bietet, weil an der zylindrischen Seitenwand des Lagers sich Spielraum befindet oder bilden mufs.

c) Hirn'sche Reibungswage.

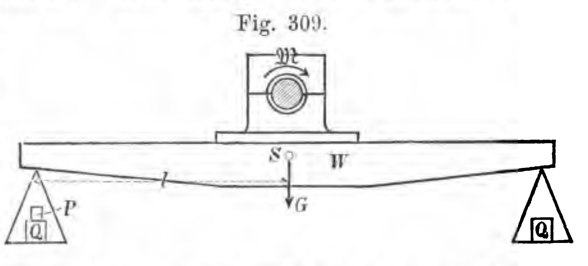
Die vom elsässischen Ingenieur Adolf Hirn im Jahre 1854 ersonnene Vorrichtung (Fig. 308 und 309) dient zur Ermittelung

Fig. 308.



der Reibungsziffer f eines Zapfenlagers durch Abwägen. Auf einer Welle, die von einer Maschine etwa mittels Riemscheiben in gleichmäfsige Drehung versetzt wird, befindet sich der zu untersuchende Lagerkörper L, der aber nicht etwa zur Stützung der Welle dient, sondern an der Welle hängt. Unten an dem Lagerkörper ist ein Wagebalken W befestigt, an dessen gleichen Armen Wagschalen hängen. Die Wagschalen werden mit Gewichten beschwert, so dafs der für die Versuche gewünschte Zapfendruck D entsteht, welcher das Reibungsmoment $\mathfrak{M} = Dfr$ erzeugt. Dieses Moment, welches vom Lager auf den Zapfen als ein der Drehung entgegen gerichtetes Moment ausgeübt wird, hat nach dem Gesetze der

Fig. 309.



Wechselwirkung das Bestreben, den Lagerkörper bei der Drehung

mitzunehmen, den Wagebalken also schräg zu stellen. Diesem Bestreben wirkt man entgegen, indem man in der linksseitigen Wagschale ein Übergewicht P anbringt (Fig. 309) und dieses so regelt, dafs der Balken wagerecht einspielt. Der Zapfendruck beträgt $D = 2\,Q + P + G$, wenn G das Eigengewicht des Lagers mit dem Balken bezeichnet. Das Reibungsmoment beträgt also $\mathfrak{M} = (2\,Q + P + G) f r$ und wird gemessen durch das Moment des Übergewichtes P, d. h. $\mathfrak{M} = P l$. Dies ergibt

$$f = \frac{P l}{(2\,Q + P + G) r}.$$

Beispiel: Bei $l = 1^{\text{m}}$, $r = 0{,}05^{\text{m}}$, $G = 100^{\text{kg}}$; $Q = 2000^{\text{kg}}$ sei das Übergewicht $P = 10^{\text{kg}}$; dann ist $f = \frac{10 \cdot 1}{(4000 + 110)\,0{,}05} = 0{,}049$.

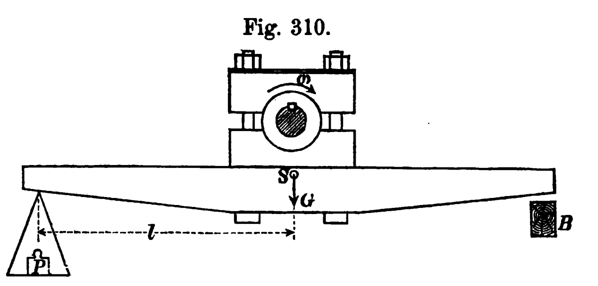
Damit der Balken gut einspiele, mufs, wie bei einer Wage, der Schwerpunkt S (Fig. 309) unterhalb der Drehachse liegen.

d) Der Bremszaum von Prony.

Der Grundgedanke der vom franz. Ingenieur Prony 1821 ersonnenen Vorrichtung zum Messen der Leistung von Kraftmaschinen ist dem der Reibungswage ähnlich.

Man hebt nämlich die Triebkraft der zu untersuchenden Maschine durch einen Reibungswiderstand auf und mifst diesen mittels einer Wage. Da es in diesem Falle nur darauf ankommt, den ganzen Betrag der Reibung zu messen, es aber nicht nötig ist, diese, wie bei der Reibungswage, nachträglich in die Faktoren f und D zu zerlegen, so ist es auch nicht erforderlich, die Reibung durch eine Belastung zu erzeugen; vielmehr kann man sie einfacher durch Zusammenschrauben zweier Bremsklötze hervorbringen (Fig. 310).

Fig. 310.



Auf der Welle der Kraftmaschine befestigt man eine Bremsscheibe und bringt auf dieser den Bremszaum an, dessen Schrauben vorläufig schwach angezogen werden. Dann setzt man die Kraftmaschine, etwa

eine Dampfmaschine, allmählich in Gang und zieht die Schrauben stärker an; die an dem Umfange der Scheibe entstehende Reibung hat nun das Bestreben, den Zaum mitzunehmen, infolgedessen sich der Wagebalken unten rechts auf eine als Hindernis dienende Schwelle B legt. Man bringt sodann die Dampfmaschine in den Zustand, in welchem sie beim regelrechten Betrieb arbeiten soll, zieht also die Bremsschrauben stärker an, wenn die Welle zu schnell läuft, und umgekehrt. Hat man auf diese Weise erreicht, dafs die Welle die vorgeschriebene Zahl von n Umdrehungen in der Minute ausführt, so wird jetzt offenbar, weil ein regelmäfsiger Gang stattfindet, die ganze Arbeit der Maschine durch den Bremszaum in Reibung umgewandelt. Belastet man nun die linkseitige Wagschale mit einem Gewichte P (einschliefslich der Wagschale) in dem Mafse, dafs der Balken sich rechts von der Schwelle abhebt und wagerecht einspielt, so ist Pl das Mafs des an der Scheibe wirkenden Reibungsmomentes $\mathfrak{M}$. Die sekundliche Arbeit desselben beträgt mithin (nach S. 247) $\mathfrak{M}\omega = Pl\omega$, oder, weil $\omega = \frac{2n\pi}{60}$ ist und 75 $^{\text{mkg}}/_{\text{sek}}$ eine Pferdestärke ausmachen, es ist die Anzahl N der Pferdestärken der Maschine

$$N = Pl\frac{n\pi}{30 \cdot 75}.$$

Beispiel: Ist $l = 2{,}5^{\text{m}}$; $P = 200^{\text{kg}}$; $n = 30$, so wird

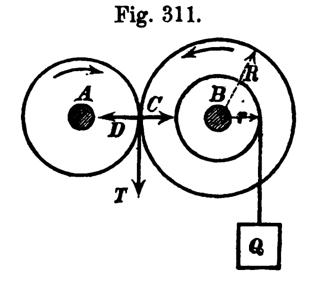
$$N = \frac{200 \cdot 2{,}5 \cdot 30 \cdot \pi}{30 \cdot 75} = 20{,}9 \; PS.$$

Auch bei dieser Vorrichtung ist es wünschenswert, dem Wagebalken Standsicherheit zu geben, d. h. den Schwerpunkt S **unterhalb** der Achse anzuordnen, was hier erreicht ist, indem der schwere Balken sich unterhalb der Bremsklötze befindet.

e) Reibungsräder.

Die Reibung zwischen zwei gegeneinander geprefsten Scheiben kann benutzt werden, um die Drehung der einen auf die andere zu übertragen. A (Fig. 311) sei die treibende, B die mitzunehmende Welle. Auf beiden bringt man Scheiben an, die sich bei C berühren. Liefse man die Scheiben mittels zahnartiger Vorsprünge ineinander greifen, so würde dadurch eine Mitnahme der Welle B

Fig. 311.



erzwungen. Läfst man aber die Vorsprünge fort, so kann auch die Reibung die Wirkung der Zähne ersetzen.

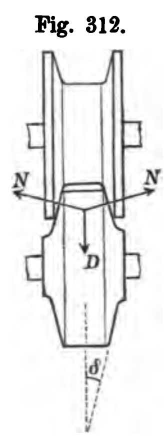
An der Welle B möge ein Widerstandsmoment $\mathfrak{M}$ der Drehung entgegenwirken; dieses kann man durch eine Last Q, welche an einer Trommel vom Halbmesser r emporgewunden wird, zur Darstellung bringen, indem man $\mathfrak{M} = Qr$ setzt. Zur Überwindung des Momentes ist eine Umfangskraft T bei C erforderlich, für welche $TR = Qr$ also $T = Qr : R$ wird. Ist nun D der Druck zwischen den Scheiben, so würde demselben beim Gleiten die Reibung fD entsprechen. Hier soll aber kein Gleiten stattfinden, vielmehr sollen die Scheiben stets gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben. Unter diesen Umständen ist dann die zur Wirkung kommende Reibung $T \leqq fD$, mithin

1) $$Q\frac{r}{R} \leqq fD \text{ oder } D \geqq \frac{Q}{f}\frac{r}{R}.$$

Das Zeichen $=$ in Gl. 1 würde auch noch für ein Gleiten der Scheiben aufeinander gelten; soll dies ausgeschlossen sein, also ein sicheres Mitnehmen der Welle B erfolgen, so mufs für D das Zeichen $>$ angewendet werden.

Beispiel: Ist das Widerstandsmoment $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ mkg, $R = 0{,}6$ m, $f = 0{,}1$ für Gufseisen auf Gufseisen, so wird $D > \frac{20}{0{,}1 \cdot 0{,}6} = 333$ kg. Bei $D = 333$ kg würde leicht noch ein Gleiten eintreten können, so dafs die Last Q abwärts gehen könnte; man mufs D um ein gewisses Mafs > 333 kg nehmen, damit man Sicherheit gegen Zufälligkeiten hat.

Fig. 312.



Der Druck D kann nur durch die Zapfenlager auf die Räder übertragen werden, erzeugt daher Zapfenreibung, deren Überwindung Arbeit kostet. Man mufs suchen, das erforderliche D klein zu machen; dies wird erreicht, indem man die Reibungsräder nicht einfach zylindrisch gestaltet, sondern keilförmig ineinander greifen läfst (Fig. 312), wodurch eine Vergröfserung der Reibung entsteht. Ist wieder der halbe Keilwinkel δ, so wird $D = 2N\sin\delta$, die mögliche Reibung

2) $$2fN = \frac{Df}{\sin\delta} > \frac{Qr}{R} \text{ oder } D > Q\frac{\sin\delta}{f}\frac{r}{R},$$

d. h. kleiner als nach Gl. 1. Dafs man bei der jetzigen Anwendung

der sog. **Keilnutenräder** mehrere Keilnuten nebeneinander anordnet, hat mit der Wirkung nichts zu tun.

Beispiel: Macht man $2\delta = 30^\circ$, so ist $\sin\delta = 0{,}26$, und es wird mit den sonstigen Zahlen des vorhergehenden Beispieles der untere Grenzwert von D: $333 \cdot 0{,}26 = 87$ kg, also nur etwas mehr als $^1/_4$ des vorigen.

f) Seilreibung.

1. Über einen Zylinder vom Halbmesser r, der sich gleichförmig um eine Achse O dreht (Fig. 313), sei ein biegsames Seil, ein biegsamer Faden, Riemen oder dgl. gelegt, bei A befestigt und bei B am freien Ende mit einer Kraft S_1 gespannt, dann drückt das Seil gegen den Zylinderumfang; an einem Bogenteilchen $ds = r \cdot d\vartheta$ entsteht eine Normalkraft dN und ein Gleitwiderstand $f \cdot dN$, der auf den sich rechts drehenden Zylinder nach links, auf das Seil aber nach rechts wirkt, das Seil also mitzunehmen strebt. In dem bei A befestigten Seilstücke möge eine Spannkraft S_2 herrschen, dann befindet sich das Seil unter Einwirkung der an ihm auftretenden Kräfte S_1, S_2, Gruppe $[dN]$ und Gruppe $[f \cdot dN]$ im Gleichgewichte, so daſs die Momentengleichung in Bezug auf O liefert (weil die dN-Kräfte durch O gehen): $S_1 r + rf\Sigma dN = S_2 r$, d. h. die gesamte Seilreibung $f\Sigma dN$ wird gemessen durch den Unterschied der Seilkräfte $S_2 - S_1$. Um also die gesamte Seilreibung zu finden, müssen wir $S_2 - S_1$ zu ermitteln suchen.

Fig. 313.

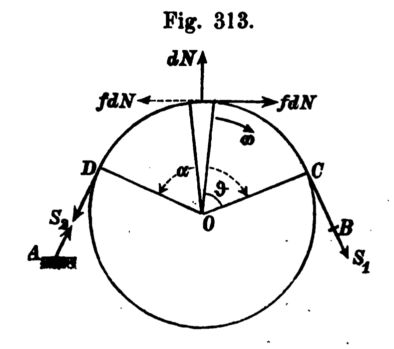


Fig. 314.

Schneiden wir aus dem Seile das Bogenteilchen $ds = r \cdot d\vartheta$ heraus (Fig. 314), so wirken außer den Kräften dN und $f \cdot dN$ noch die Spannkräfte S und $S + dS$. Zerlegt man sämtliche Kräfte $\parallel$ und $\perp$ zu dN, so verlangt das Gleichgewicht

$$dN = (S + S + dS) \sin {}^1/_2\, d\vartheta \quad \text{und}$$

$$f \cdot dN = dS \cos {}^1/_2\, d\vartheta,$$

oder, weil $\sin \frac{1}{2} d\vartheta = \frac{1}{2} d\vartheta$, $\cos \frac{1}{2} d\vartheta = 1$ und $dS \cdot d\vartheta$ unendlich klein zweiter Ordnung ist:

$$dN = S \cdot d\vartheta \quad \text{und}$$

$$f \cdot dN = dS, \quad \text{mithin}$$

$$f \cdot d\vartheta = dS : S.$$

Durch Integration entsteht:

$$f \cdot \vartheta = \mathfrak{l} S + C.$$

$\vartheta = 0$ entspreche dem Punkte C (Fig. 313) und der Spannkraft S_1, $\vartheta = \alpha$ dem Punkte D und der Spannkraft S_2, dann wird $f\alpha = \mathfrak{l} S_2 + C$; $0 = \mathfrak{l} S_1 + C$, mithin aus beiden:

$$2) \qquad f\alpha = \mathfrak{l}\left(\frac{S_2}{S_1}\right) \text{ oder } \frac{S_2}{S_1} = e^{f\alpha},$$

und die ganze Seilreibung

$$3) \qquad S_2 - S_1 = S_1 \, (e^{f\alpha} - 1).$$

Dabei ist besonders bemerkenswert, dafs das Verhältnis der Kräfte unabhängig ist von r, nur abhängig von der Reibungsziffer und dem dem umspannten Bogen entsprechenden Mittelpunktswinkel α.

Wenn der Zylinder ruht, so wird die Summe aller zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände $\int dT$ ebenfalls durch $S_2 - S_1$ gemessen; es ist dann aber

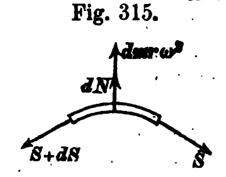
$$S_2 : S_1 < e^{f\alpha} \text{ und auch}$$

$$4) \qquad S_2 - S_1 < S_1 \, (e^{f\alpha} - 1).$$

Für $S_2 = S_1$ würde keine Reibung ausgeübt werden. Bei einem Unterschiede zwischen S_1 und S_2 bezeichnen wir mit S_2 stets die gröfsere der Kräfte.

2. Ist das Seil nicht in Ruhe, sondern wird es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = r\omega$ über den ruhenden oder mit anderer Geschwindigkeit sich drehenden Zylinder fortgezogen, so heben sich an einem Bogenteilchen $r \cdot d\vartheta$ die normal gerichteten Kräfte nicht auf, sondern es geschieht dies erst, nachdem die Zentrifugalkraft $dm \cdot r\omega^2$ hinzugefügt ist (Fig. 315). Es wird dann

Fig. 315.



$$dN = S \cdot d\vartheta - dm \cdot r\omega^2.$$

Darin ist $dm = \frac{\gamma}{g} Fr \cdot d\vartheta$, wenn F der Querschnitt, γ die Dichte des Fadens, Riemens oder Seiles. Die andere Gleichung $f \cdot dN = dS$ bleibt unverändert; weil nun

$$d\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) = dS,$$

so wird

$$f \cdot d\vartheta = \frac{d\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right)}{S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2},$$

also $$f\vartheta = \mathfrak{l}\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) + C,$$

oder zwischen Grenzen genommen:

$$f\alpha = \mathfrak{l}\left(\frac{S_2 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2}{S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2}\right).$$

Daraus entsteht:

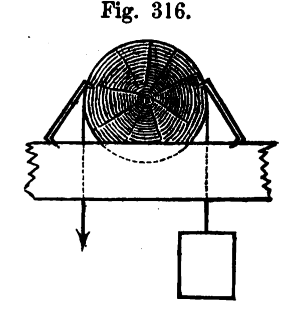
$$S_2 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) e^{f\alpha}, \text{ oder}$$

5) $$S_2 - S_1 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right)(e^{f\alpha} - 1).$$

In den meisten Fällen ist der Einfluſs des Gliedes $\frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2$ unbedeutend; nur bei groſsen Geschwindigkeiten $r\omega$ verdient er Berücksichtigung (vgl. S. 264).

Beispiel: Ein runder Baum sei auf einer Schwelle festgelegt (Fig. 316) und auſserdem durch Zimmermannshaken gehalten. Ein Seil sei derartig hinübergeschlungen, daſs $\alpha = \pi$. An der rechten Seite hänge eine Last von 1000 kg. Es soll berechnet werden, mit welcher Kraft links gezogen werden muſs, um die Last hinauf zu ziehen. Da auſser der Last noch die Reibung überwunden werden muſs, so wird links die gröſsere Kraft S_2 wirken, während rechts $S_1 = 1000$ kg ist. Die Reibungsziffer werde für ein Hanfseil auf Holz zu $f = \frac{1}{3}$ angenommen.

Fig. 316.



$$S_2 : S_1 = e^{\frac{1}{3}\pi}.$$

Nimmt man von beiden Seiten der Gleichung die Briggischen Logarithmen, so wird $\log\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = \frac{1}{3}\pi \log e = 1{,}047 \cdot 0{,}434 = 0{,}4544$. Dazu gehört eine Zahl $2{,}85 = S_2 : S_1$. Mithin wird $S_2 = 2850$ kg; die Seilreibung beträgt 1850 kg, ist also sehr grofs. Diese Vorrichtung eignet sich daher nicht als Aufzugsmaschine, um so besser aber zum Hinablassen einer Last, wobei die Reibung günstig wirkt. Beim Hinablassen wirkt die kleinere Kraft S_1 auf der linken Seite, während die Last jetzt $S_2 = 1000$ kg wird. Wiederum ist $e^{f\alpha} = 2{,}85$, daher $S_1 = 1000 : 2{,}85 = 351$ kg. Jetzt kommt also die Seilreibung im Betrage von $1000 - 351 = 649$ kg der hinablassenden Kraft zu Hülfe. Die Zugkraft an der linken Seite darf zwischen den weiten Grenzen 351 und 2850 kg sich bewegen, ohne dafs ein vorhandener Ruhezustand gestört werden würde. Da die Reibung das Bestreben hat, den Balken zu drehen, so mufs er hiergegen sicher befestigt werden.

Zum Festhalten oder bequemen Hinablassen schwerer Lasten findet eine derartige Vorrichtung vielfache Anwendung. Die Reibung wird noch bedeutend vergröfsert, wenn man den Winkel α des umspannten Bogens vergröfsert. Man kann dadurch jedes beliebige Verhältnis $S_2 : S_1$ erreichen. Wir wollen berechnen, wie grofs α werden mufs, wenn $S_2 : S_1 = 1000$ sein soll, d. h. wenn man durch Anwendung von $S_1 = 1$ kg die Last von 1000 kg hinablassen will. Es mufs $e^{1/3\,\alpha} = 1000$, d. h. in Logarithmen $1/3\,\alpha\, 0{,}434 = 3$, oder $\alpha = 9 : 0{,}434 = 20{,}7$ sein. Da nun eine Umwickelung einem Winkel 2π entspricht, so mufs die Zahl der Umwickelungen $n = 20{,}7 : 2\pi = 3{,}3$ betragen. Wenn man also das Seil 3 Mal und dann noch $1/3$ oder vielleicht $1/2$ Mal umlegt, so wird das Ziel erreicht sein. Bei öfterem Umschlagen genügt schliefslich das Gewicht des überhängenden Seilendes zum Festhalten der Last.

Es ist für die Wirkung gleichgültig, ob der umspannte Bogen α sich auf einem Zylinder befindet, oder ob das Seil nacheinander um mehrere Zylinder geschlungen ist; in letzterem Falle ist α die Summe der umspannten Bögen. Auf diesem Grundgedanken beruhen die Rettungsvorrichtungen bei Feuersgefahr, mittels deren Menschen aus einem brennenden Hause hinabgelassen werden können.

Fig. 317.

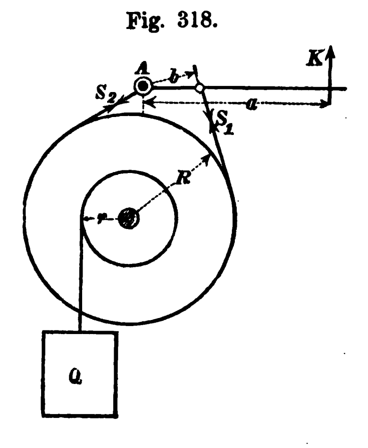
Erheblich vergröfsert wird die Seilreibung noch, wenn man das (runde) Seil in eine Keilrinne (Fig. 317) legt, weil dann $f : \sin\delta$ an Stelle von f zu setzen ist.

g) Bandbremse.

Ein dünnes Bandeisen, welches man um einen Zylinder spannt, um an diesem einen Reibungswiderstand zu erzeugen, heifst Bremsband und findet als Bandbremse bei Winden vielfache Anwendung zum gleichmäfsigen Hinablassen von Lasten. An einer Windetrommel

vom Halbmesser r (Fig. 318) hänge das Gewicht Q. Mit der Trommel fest verbunden ist die Bremsscheibe vom Halbmesser R. Das umgelegte Bremsband sei mit dem einen Ende am Gestelle befestigt, z. B. an dem Drehpunkte A des Bremshebels, das andere Ende des Bandes sei mit dem Hebel verbunden. Am Ende des Hebels wirke aufwärts die Kraft K, welche in dem Band eine Spannkraft S_1 auf der rechten Seite hervorruft. Bei der Drehung links herum entsteht an der Scheibe eine der Drehung entgegen wirkende Bandreibung $S_2 - S_1 = S_1\ (e^{fa} - 1)$, welche, mit R multipliziert, dem Momente Qr der Last gleich sein

Fig. 318.



mufs. Ist nun b der Hebelarm von S_1 (aber nicht als Länge am Hebel, sondern rechtwinklig zu S_1 gemessen), so wird $Ka = S_1 b$, mithin $K = \frac{Q}{e^{fa} - 1} \frac{r}{R} \frac{b}{a}$.

Beispiel: Der Winkel des umspannten Bogens sei $a = 0{,}7 \cdot 2\pi$, die Reibungsziffer für Bandeisen auf gufseiserner Scheibe $f = 0{,}18$, $r : R = 1/2$, $a : b = 10$; dann wird $e^{af} = 2{,}21$ und

$$K = \frac{Q}{2{,}21 - 1} \frac{1}{2} \frac{1}{10} = \frac{Q}{24{,}2},$$

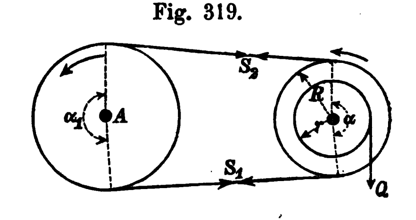
d. h. mit einer Kraft $K = 10^{\text{kg}}$ kann man eine Last $Q = 242^{\text{kg}}$ hinablassen.

Es ist rätlich, von den beiden Kräften des Bandes die kleinere S_1 auf den Hebel wirken, die gröfsere S_2 aber vom festen Gestell aufnehmen zu lassen.

h) Riemenscheiben.

Nützliche Anwendung findet die Seilreibung auch bei den Riemenscheiben, welche zur Übertragung der Bewegung von einer Welle auf eine ihr parallele Welle dienen, wenn die Entfernung der Wellen so grofs ist, dafs eine unmittelbare Übertragung mittels Reibungsräder oder Zahnräder nicht zweckmäfsig erscheint (Fig. 319). Der biegsame

Fig. 319.



Körper, der um die Umfänge der Scheiben gelegt wird, ist hier meist ein Lederriemen. Die Welle A drehe sich links herum; der Riemen sei genügend angespannt, so dafs er auf den Scheiben nicht gleitet, dafs vielmehr beide Scheibenumfänge und der Riemen die übereinstimmende Geschwindigkeit v haben müssen. Der Drehung der rechtsseitigen Welle setze sich ein Widerstandsmoment entgegen, welches wir wieder auf die Form $\mathfrak{M} = Qr$ bringen wollen (vergl. S. 257). Sind S_2 und S_1 die Spannkräfte der Riementeile, so wird die ganze Seilreibung an der rechtseitigen Scheibe stets gemessen durch $S_2 - S_1$, und für gleichmäfsige Drehung der rechtseitigen Welle ist erforderlich

$$1) \qquad S_2 - S_1 = Qr : R.$$

Da nun Riemen und Scheibe nicht aufeinander gleiten, so ist

$$2) \qquad S_2 - S_1 \leqq S_1 \left(e^{f\alpha} - 1\right),$$

oder durch Verbindung von Gl. 1 und 2:

$$S_1 \geqq Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1}, \quad \text{wofür wir schreiben wollen:}$$

$$3) \qquad S_1 = Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + \varDelta S;$$

darin ist $\varDelta S$ der Überschufs an Spannkraft, der wegen der Sicherheit gegen Gleiten nötig ist, dessen Grösse aber nur durch Erfahrung bestimmt wird. Aus Gl. 3 und 1 wird dann

$$S_2 = S_1 + \frac{Qr}{R} = \frac{Qr}{R}\left(\frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + 1\right) + \varDelta S \text{ oder}$$

$$4) \qquad S_2 = \frac{Qr}{R} \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} + \varDelta S.$$

Die Gröfse α des Winkels des umspannten Bogens wirkt in günstigem Sinn auf die Verhinderung des Gleitens. Da nun die gleichen Kräfte S_1 und S_2 an beiden Scheiben wirken, die Winkel α und α_1 aber bei beiden Scheiben im allgemeinen ungleich sind, so mufs von den beiden Winkeln α und α_1 stets der kleinere in Rechnung geführt werden.

Beispiel: Für Lederriemen auf Gufseisenscheiben setzt man $f = 0{,}28$, sind ferner die beiden Scheiben gleich und daher $\alpha = \pi$, so wird

$$e^{f\alpha} = e^{0{,}28\,\pi} = 2{,}41.$$

Ist nun $R = 0{,}6^{\,\mathrm{m}}$, $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0{,}2 = 20^{\,\mathrm{mkg}}$, so wird

$$S_1 = \frac{20}{0{,}6}\,\frac{1}{1{,}41} + \Delta S = 23{,}64^{\,\mathrm{kg}} + \Delta S;$$

$$S_2 = 23{,}64 \cdot 2{,}41 + \Delta S = 56{,}97^{\,\mathrm{kg}} + \Delta S.$$

Wie bei den Reibungsrädern der Druck D, so verursachen hier die Spannkräfte S_1 und S_2 Zapfenreibungswiderstände in den Lagern. In ähnlicher Weise wie dort D, können hier S_1 und S_2 vermindert werden, wenn man den Riemen durch eine runde Schnur ersetzt und die Scheibe mit einer keilförmigen Rinne versieht (Fig. 320), so dafs infolge der Keilwirkung wiederum f mit $f\colon \sin\delta$ zu vertauschen ist. Man wähle δ so grofs, dafs das Seil sich in der Rinne nicht festklemme, mache also $\delta > \varphi$, damit das Seil beim Ablaufen sich ohne erheblichen Widerstand aus der Rinne entfernt, nicht aber gewaltsam herausgezerrt werden mufs.

Fig. 320.



Ist für Hanfseile in gufseisernen Rinnen $f = {}^1/_3$, $\varphi = 18^{\circ}$, so ist $\delta = 30^{\circ}$ zulässig.

In den vorstehenden Rechnungen ist der Einflufs der Geschwindigkeit des Riemens auf Verminderung der Reibung nicht berücksichtigt. Für schnelllaufende Riemen ist an Stelle der Gl. 4 auf S. 259 zu setzen (nach Gl. 5, S. 260)

$$\left(S_1 - \frac{\gamma}{g}\,F r^2 \omega^2\right)\left(e^{f\alpha} - 1\right) \geqq S_2 - S_1 = Q\,\frac{r}{R}.$$

Dadurch kommt dann zu den Werten S_1 und S_2 nach Gl. 3 und 4, S. 263 noch der Summand $\frac{\gamma}{g}\,F r^2 \omega^2$ hinzu.

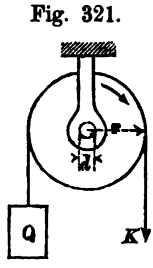
Hat z. B. ein Riemen von $0{,}5^{\,\mathrm{cm}} \times 6^{\,\mathrm{cm}} = 3^{\,\mathrm{qcm}} = 0{,}0003^{\,\mathrm{qm}}$ Querschnitt eine Dichte von 900, so ist $\gamma F = 0{,}27^{\,\mathrm{kg/m}}$. Bei $15^{\,\mathrm{m}}$ sekundl. Umfangsgeschwindigkeit wird dann $\frac{\gamma}{g}\,F r^2 \omega^2 = \frac{0{,}27 \cdot 15^2}{9{,}81} = 6{,}2^{\,\mathrm{kg}}$. Aus den Zahlen des vorstehenden Beispieles wird dann $S_1 = 23{,}64 + 6{,}2 + \Delta S$ und $S_2 = 57{,}37 + 6{,}2 + \Delta S$.

i) Seilrollen und Flaschenzüge.

Ist über eine Rolle (Fig. 321) ein völlig biegsamer Faden gelegt, der die Last Q trägt, so würde, wenn sich der Drehung der Rolle kein Widerstand entgegensetzte, zur gleichmäfsigen Drehung kein Moment, also auch keine Seilreibung erforderlich sein, es

würde dann $K = Q$ hinreichen zum Hinaufziehen der Last. Nun findet aber ein Zapfendruck $D = Q + K$ statt, also ein Reibungsmoment $\mathfrak{M} = Df\frac{d}{2}$ (wenn d der Zapfendurchmesser), zu dessen Überwindung eine am Umfange der Rolle angreifende Kraft $\frac{\mathfrak{M}}{r} = Df\frac{d}{2r} = \frac{Q+K}{2r}fd$ nötig ist. Dies ist die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung Z. Diese Kraft kann von dem Seile nur durch die Seilreibung auf die Rolle übertragen werden, oder es ist $K - Q = \frac{K+Q}{2r}fd$. Daraus entsteht

Fig. 321.



$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + \frac{fd}{2r}}{1 - f\frac{d}{2r}}.$$

Zur Vereinfachung multiplizieren wir in Zähler und Nenner mit dem Zähler, erhalten

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + f\frac{d}{r} + \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}{1 - \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}$$

und vernachlässigen nun den kleinen Wert $\left(\frac{fd}{2r}\right)^2$ gegen die Einheit, so dafs genau genug

1) $$\frac{K}{Q} = 1 + f\frac{d}{r} \quad \text{wird.}$$

Man kann auch schreiben $K = Q + Z$, wo

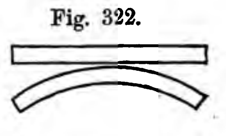
2) $$Z = Qf\frac{d}{r}$$

die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung, d. h. man kann (nach A. Ritter, Lehrbuch der technischen Mechanik, 2. Aufl., S. 365) die Sache so ansehen, als ob zu der Kraft $K_0 = Q$, die bei einer ideellen Rolle hinreichen würde, noch der Betrag Z hinzutreten mufs.

Aufser der Zapfenreibung mufs aber auch noch der Seilbiegungswiderstand berücksichtigt werden. Wir haben bisher ein Seil angenommen, dessen Richtung stets mit der Richtung seiner

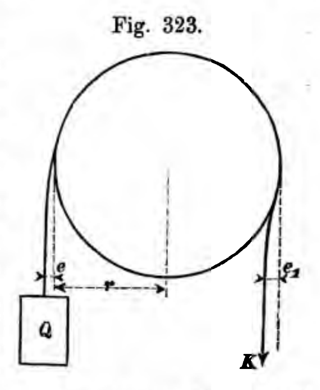
Spannkraft übereinstimmt, welches daher zu beiden Seiten der Rolle sich völlig tangential an diese legt. Wird aber ein wirkliches Seil aus der geraden Form in eine Krümmung übergeführt (Fig. 322), so müssen wegen der Längenverschiedenheit am inneren und äufseren Umfange die einzelnen Fasern, aus denen das Seil besteht, sich gegeneinander verschieben, und dieser Verschiebung setzt sich ein Widerstand entgegen. Auch beim Übergang aus dem gekrümmten Zustand in den geraden ergeben sich die gleichen Widerstände.

Fig. 322.



Soll nun an der linken Seite der Rolle die Last Q aufgewunden werden, so geht das Seil nicht plötzlich aus der geraden Tangente in die Krümmung $1:r$ über, sondern es verteilt sich diese Krümmungsänderung auf eine gewisse Länge, und die Folge davon ist, dafs die Mittellinie des unteren Teils des Seiles um eine gewisse Gröfse e von der Tangente nach aufsen abweicht (Fig. 323). Auf der Ablaufseite erfolgt der Übergang aus der Krümmung $1:r$ in die Krümmung Null ebenfalls allmählich mittels einer Gegenkrümmung, und es folgt daraus eine Abweichung der Kraft K von der Tangente um die Gröfse e_1 nach innen. Die Biegungswiderstände haben dann dieselbe Einwirkung auf die Drehung der Rolle, als ob die Last Q an dem gröfseren Hebelarm $r + e$, die treibende Kraft K aber an dem kleineren Hebelarm $r - e_1$ angreift, wobei man die Abstände e und e_1 gleich annehmen darf; daher wird

Fig. 323.



$$K(r - e) = Q(r + e) \quad \text{oder}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{r + e}{r - e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}},$$

wofür man, weil $e:r$ wieder ein kleiner Wert ist, schreiben kann (vergl. S. 265)

$$\frac{K}{Q} = 1 + \frac{2e}{r}.$$

Nennt man $Q \cdot 2e : r = B$ den auf den Rollenumfang bezogenen Biegungswiderstand, so kann man den Einflufs dieses Umstandes wieder so auffassen, als ob zu $K_0 = Q$ wegen der unvollkommenen Biegsamkeit noch der Betrag B hinzutreten mufs.

Die Gröfse e in Metern ist von der Dicke und Beschaffenheit des Seiles abhängig. Nach Versuchen ist für Seile von der Dicke δ (in Metern)

3) $$e = 6{,}5\,\delta^2, \quad \text{oder} \quad B = Q\frac{13\,\delta^2}{r}.$$

Werden nun durch die Wirkung der Zugkraft K bei gleichförmiger Drehung der Rolle Zapfenreibung und Biegungswiderstand zugleich überwunden, so kann man

4) $$K = Q + Z + B = Q\left(1 + f\frac{d}{r} + \frac{13\,\delta^2}{r}\right) \text{ setzen, oder}$$

5) $$K = Qw,$$

wenn $w = 1 + f\frac{d}{r} + \frac{13\,\delta^2}{r}$ ist; w heifst dann die Widerstandsziffer für Seilrollen.

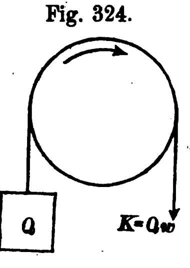


Fig. 324.

Ist die Seildicke $\delta = 0{,}02^{\text{m}}$, der Rollenhalbmesser $r = 0{,}09^{\text{m}}$, der Zapfendurchmesser $d = 0{,}03^{\text{m}}$, $f = 0{,}12$, so wird

$$w = 1 + \frac{0{,}12 \cdot 0{,}03}{0{,}09} + \frac{13 \cdot 0{,}0004}{0{,}09} = 1 + 0{,}04 + 0{,}06 = 1{,}10.$$

Die Zapfenreibung vergröfsert also die erforderliche Zugkraft um 4 %, der Seilbiegungswiderstand um 6 %; der Abstand der Seilmitte von der Tangente beträgt $e = 6{,}5 \,.\, 0{,}0004 = 0{,}0026^{\text{m}} = 2{,}6^{\text{mm}}$.

Um eine Last von 100^{kg} mittels einer solchen Rolle und eines solchen Seiles gleichmäfsig emporzuziehen, ist eine Kraft $K = 110^{\text{kg}}$ erforderlich (Fig. 324). Beim Hinablassen der Last vertauschen Q und K ihre Rollen; das Verhältnis beider bleibt aber w, daher wird dann

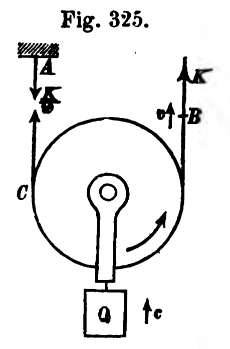
$$K = Q : w = 100 : 1{,}1 = 90{,}9^{\text{kg}}.$$

Bei einem über eine Rolle geführten Seil ist die Spannkraft in dem sich abwickelnden Seilstücke die gröfsere; das Verhältnis beider Spannkräfte beträgt stets w.

Streng genommen mufs für jede gegebene Rolle mit Seil der Ausdruck w besonders berechnet werden. Da die Verhältnisse zwischen d, r und δ aber meist nicht sehr schwanken, wollen wir für fernere Beispiele mit Seilrollen $w = 1{,}1$ wählen.

Lose Rolle. Bei der sog. losen Rolle ist die Drehachse nicht fest gelagert; vielmehr ist das eine Ende des Seiles bei A (Fig. 325) befestigt; an dem anderen wird bei B gezogen, und die Last hängt an der Achse der Rolle. Beim gleichmäfsigen Aufwärtsziehen erfährt die Rolle eine aufwärts gerichtete Verschiebung mit der Geschwindigkeit c, welche sich mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ im Punkte C derartig vereinigt, dafs dort die Geschwindigkeit Null entsteht. Denn das Seil AC ruht, und da es auf der Rolle nicht gleitet, so mufs auch der Punkt C der Rolle die Geschwindigkeit Null haben. Mithin ist $c = r\omega$. An der rechten Seite der Rolle addieren sich c und $r\omega$ zu der Geschwindigkeit $v = c + r\omega = 2c$, mit welcher der Punkt B des Seiles sich aufwärts bewegen mufs. Die lose Rolle wälzt sich an dem Seile AC empor; die Bewegung ist eine Rollenbewegung, bei der die einzelnen Punkte der Rolle Zykloiden beschreiben.

Fig. 325.



Das Verhältnis der Spannkräfte des Seiles mufs wieder w betragen; ist also rechts im ablaufenden Stücke die Spannkraft K, so mufs sie links $K:w$ sein. Nach S. 245 müssen auch bei dieser zusammengesetzten Bewegung die Kräfte K und $K:w$ der Last Q das Gleichgewicht halten. Mithin wird

$$Q = K\left(1 + \frac{1}{w}\right) = K(1 + 0{,}91) = 1{,}91\,K.$$

Für eine ideelle Rolle ohne Widerstände ist $w = 1$, mithin $Q = 2K_0$. Der Wirkungsgrad (s. S. 240) ist, weil $v = 2c$:

$$\eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{Q}{2K} = \frac{2K_0}{2K} = \frac{K_0}{K} = \frac{1{,}91}{2} = 0{,}955.$$

Flaschenzug. Ein Achsgestell mit einer oder mehreren Rollen heifst ein Kloben — auch eine Flasche (weil früher die Form der Kloben mit einer Flasche einige Ähnlichkeit hatte). Aus einer durch ein umgeschlungenes Seil oder Kette hergestellten Verbindung von festen und losen Kloben besteht der Flaschenzug. Sind mehrere Rollen in einem Kloben angeordnet, so bringt man diese jetzt meistens auf dieselbe Achse. In der Fig. 326 sind aber der Deutlichkeit wegen die Rollen untereinander gezeichnet.

Die in Wirklichkeit gleichen Rollen zeigen hier etwas verschiedene Gröſse. Die Zahl der Rollen in jedem Kloben beträgt in der Zeichnung 2, allgemein sei sie n. Der obere Kloben ist in dem Deckenbalken befestigt, an dem unteren Kloben hängt die Last Q.

Fig. 326.

Beim Aufwinden drehen sich (Fig. 326) sämtliche Rollen links herum. Die bei B angreifende Kraft sei K, dann ist die Spannkraft in dem rechtseitigen Seilstücke $K:w$, sie vermindert sich nach dem Übergange über die Rollen schrittweise auf $K:w^2$, $K:w^3$ und $K:w^4$. Das Verhältnis $v:c$ ist offenbar gleich der Zahl der Seilstücke, an denen der untere Kloben hängt, also 4 oder allgemein $2n$. Die Seile werden als sämtlich lotrecht angenommen, da die geringen Abweichungen keine Bedeutung haben. Rückt die Last um c aufwärts, so verkürzen sich die Seilstücke je um c, zusammen also um $4c$ bezw. $2nc$. Die gleiche Länge $v = 4c$ bezw. $v = 2nc$ muſs daher bei B abwärts gezogen sein. Macht man durch einen Schnitt zwischen beiden Kloben den unteren frei, so verlangt dessen Gleichgewicht, daſs die Last Q gleich der Summe der Kräfte der durchschnittenen Seile sei. Ohne Widerstände wären die Seilkräfte durchweg K_0, daher $Q = 4K_0$ bezw. $= 2nK_0$, mithin ist wieder $v:c = Q:K_0$.

In Wirklichkeit ist

$$Q = K\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^4}\right) = \frac{K}{w^4}(w^3 + w^2 + w + 1)$$

$$6) \qquad = \frac{K}{w^4}\,\frac{w^4 - 1}{w - 1} \text{ und ebenso (allgemein)}$$

$$7) \qquad Q = \frac{K}{w^{2n}}\,\frac{w^{2n} - 1}{w - 1}; \text{ mithin}$$

$$8) \qquad \eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{w^{2n} - 1}{2n \cdot w^{2n}(w - 1)}.$$

Beispiel: Es sei wieder $w = 1{,}1$, dann wird
für $n = 2$: $Q = 3{,}16\,K$, $\eta = 0{,}79$,
für $n = 4$: $Q = 5{,}34\,K$, $\eta = 0{,}67$.

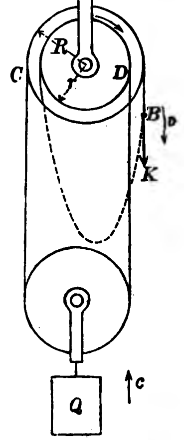
Im ersten Falle werden 79 % der aufgewendeten Arbeit nützlich verwertet, im zweiten nur 67 %, während 21 bezw. 33 % verloren gehen. Mit wachsender

Rollenzahl nimmt also der Wirkungsgrad ab. Es ist daher besser, eine schwere Last an 2 Flaschenzügen zu je 4 Rollen aufzuwinden, als an 1 Flaschenzuge mit 8 Rollen.

Für das Hinablassen der Last ist durchweg w mit $1:w$ zu vertauschen.

Differenz-Flaschenzug. Der Differenz-Flaschenzug (Fig. 327) gestattet, mit nur 3 Rollen ein bedeutendes Übersetzungsverhältnis $v:c$ zu erreichen. Die beiden Rollen des oberen Klobens bilden zusammen ein Stück, haben daher gleichen Drehungswinkel. Statt eines Seiles dient eine Kette. Wird bei B eine Kettenlänge v abwärts gezogen, so findet bei C ein Aufwärtswinden um v, bei D ein Abwärtswinden um $vr:R$, also zusammen eine Verkürzung der Kette zwischen beiden Kloben um $v\left(1-\frac{r}{R}\right)$ statt; da sich diese auf 2 Stücke verteilt, so hebt sich der untere Kloben um $c=\frac{v}{2}\left(1-\frac{r}{R}\right)$, mithin ist

Fig. 327.



$$9)\qquad \frac{v}{c}=\frac{2}{1-\frac{r}{R}}.$$

Der Name des Flaschenzuges erklärt sich daraus, dafs das Heben infolge der Differenz zwischen Aufwinden und Abwinden zu stande kommt.

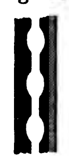
Ohne Widerstände würde in jedem Kettenstücke des unteren Klobens eine Kraft $^1/_2\,Q$ herrschen; dann ergibt (wenn K_0 die ideelle Triebkraft) die Momentengleichung des oberen Klobens $0=K_0R+{}^1/_2\,Qr-{}^1/_2\,QR$ oder $K_0R={}^1/_2\,Q(R-r)$, d. h.

$$10)\qquad Q:K_0=2:(1-r:R)=v:c.$$

Macht man z. B. $r:R=14:15$, so wird $Q:K_0=v:c=30$.

An der linken Seite der kleineren Rolle des oberen Klobens ist die Kette ohne Spannkraft, während auf der rechten Seite eine Spannkraft $= {}^1/_2\,Q$ herrscht; ebenso ist der Unterschied der Spannkräfte der grofsen Rolle ein so erheblicher, dafs die Seilreibung nicht genügen würde, um ein Gleiten zu verhindern. Aus diesem Grunde hat man statt des Seiles eine Kette gewählt, die zwischen zahnartige seitliche Vorsprünge der oberen Rollenkörper (Fig. 328) eingreift und

Fig. 328.



dadurch ein Gleiten unmöglich macht. Eine solche Kette hat nur geringe Steifigkeit, weshalb man die Widerstandsziffer der Kettenrolle zu $w = 1{,}05$ annehmen kann.

Fig. 329.

Betrachtet man die Verhältnisse annäherungsweise so, als ob der Widerstand ganz allein von der Zapfenreibung gebildet würde, so wäre nach Gleichung 4, S. 267

$$w = 1 + f\frac{d}{R}. \tag{11}$$

An der unteren Rolle wirken Kettenkräfte S und Sw (Fig. 329), und es ist

$$Q = S(1 + w).$$

An der oberen Rolle tritt ein Zapfendruck auf, der annähernd gleich Q, da K nur ziemlich klein ist. Dadurch entsteht ein Zapfenreibungsmoment $\frac{1}{2}Qfd$. Die Momentengleichung für den oberen Rollenkörper lautet:

$$0 = KR + Sr - SwR - \tfrac{1}{2}Qfd.$$

Daraus wird
$$K = S\left(w - \frac{r}{R}\right) + Qf\frac{d}{2R}$$

$$= \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{r}{R}\right) + Qf\frac{d}{2R} \quad \text{oder,}$$

12) weil $f\frac{d}{R} = w - 1$ (Gl. 11),

$$K = \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{r}{R} + \frac{w^2 - 1}{2}\right).$$

Es ist aber $w + \frac{w^2-1}{2} = w^2 - \frac{w^2 - 2w + 1}{2} = w^2 - \frac{(w-1)^2}{2}$.

Da nun $w^2 = 1{,}05^2 = 1{,}1$, $(w-1)^2$ aber nur $= 0{,}0025$, so ist $\frac{(w-1)^2}{2}$ gegen w^2 zu vernachlässigen, daher annähernd

$$K = \frac{Q}{1+w}\left(w^2 - \frac{r}{R}\right) \tag{13}$$ zu schreiben.

Für gleichmäfsiges Hinablassen ist w durch $1:w$ zu ersetzen; es wird dann an Stelle von K die Kraft K_1 nötig mit

$$K_1 = \frac{Q}{1+\frac{1}{w}}\left(\frac{1}{w^2} - \frac{r}{R}\right). \tag{14}$$

Da nun $1:w^2$ ein echter Bruch und $r:R$ ebenfalls, so könnte man $r:R$ beispielsweise $= 1:w^2$ wählen. Dann wird $K_1 = 0$, d. h. die Last geht gleichmäfsig abwärts, ohne dafs eine hemmende Kraft K_1 nötig ist; oder die Last Q wird durch die Widerstände eben im Gleichgewichte gehalten. Unter diesen Verhältnissen ($r:R = 1:w^2$) wird für Aufwinden

$$K = Q\frac{\left(w^2 - \frac{1}{w^2}\right)}{1 + w} = \frac{0{,}2}{2{,}05}Q,$$

ohne Widerstände aber

$$K_0 = Q\frac{\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)}{2} = \frac{0{,}1}{2}Q,$$

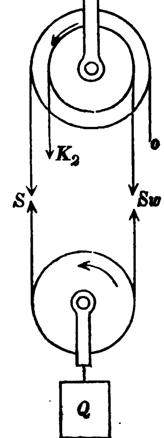
mithin ist der Wirkungsgrad $\eta = \frac{0{,}1 \cdot 2{,}05}{2 \quad 0{,}2} = 0{,}51$, also (in Übereinstimmung mit S. 242) nahezu gleich $^1/_2$.

Soll der Flaschenzug sich aber mit **Sicherheit** bremsen, so mufs rechnungsmäfsig $K_1 < 0$, d. h. $1 : w^2 < r : R$, oder

15) $$r : R > 1 : w^2 \text{ sein.}$$

Diese Eigenschaft der **Selbstsperrung** wird bei dem Differenz-Flaschenzuge gewünscht. Weil nun ein negativer Zug K_1 an der Kette nicht ausgeübt werden kann, so mufs die Drehung linksherum durch einen Zug K_2 an dem bisher nicht benutzten Kettenstücke bewirkt werden (Fig. 330). Da der Zapfendruck am oberen Zapfen wieder annähernd Q beträgt, das Reibungsmoment daher $Qf\,^1/_2\,d$, so lautet die Momentengleichung der oberen Rolle

Fig. 330.



$$K_2 r + SR = Swr + Qf\,^1/_2\,d.$$

Wegen des geringen Unterschiedes zwischen r und R kann aber $fd = (w - 1)R$ (Gl. 12) annähernd auch $= (w - 1)r$ gesetzt werden, so dafs

$$K_2 = S\left(w - \frac{R}{r}\right) + Q\frac{(w-1)}{2} \text{ wird,}$$

oder, weil wieder $Q = S(1 + w)$

$$K_2 = \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{R}{r}\right) + \frac{Q}{2}(w - 1) = \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{R}{r} + \frac{w^2 - 1}{2}\right).$$

Es ist aber wieder $w + \frac{w^2 - 1}{2} = w^2 - \frac{(w-1)^2}{2}$ oder annähernd $= w^2$, mithin

$$K_2 = \frac{Q}{1+w}\left(w^2 - \frac{R}{r}\right), \tag{16}$$

was für $w^2 > R:r$ (Gl. 15) positiv wird.

Beispiel: Für $w = 1{,}05$ ist $w^2 = 1{,}1$, $1 : w^2 = 0{,}909$. Wählt man nun $r : R = 14 : 15$, so ist $\frac{14}{15} = 0{,}93 > 0{,}909$, d. h. die Bedingung (15) der Selbstsperrung erfüllt. Es ist ferner (nach Gl. 10) $v : c = 30 = Q : K_0$. Für das Aufwinden wird (nach Gl. 13) $K = \frac{Q}{2{,}05}\left(1{,}1 - \frac{14}{15}\right) = \frac{Q}{12{,}1}$. Da nun $K_0 = \frac{Q}{30}$, so ist

$$\eta = \frac{12{,}1}{30} = 0{,}40.$$

Zum Hinabwinden ist die Kraft $K_2 = \frac{Q}{2{,}05}\left(1{,}1 - \frac{15}{14}\right) = \frac{Q}{71}$ aufzuwenden.

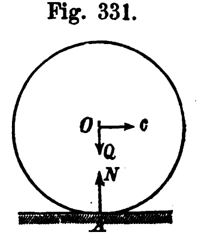
Also mit Aufwand von $K = 10$ kg kann man $Q = 121$ kg heben, während zum Hinabwinden $K_2 = 1{,}7$ kg hinreicht.

Der Differenz-Flaschenzug ist offenbar keine vorteilhafte Aufzugsmaschine, da sein Wirkungsgrad nur 0,4 beträgt. Angenehm sind aber seine Einfachheit und die Bequemlichkeit der Handhabung. Beim Einspannen einer schweren Achse in eine Drehbank oder beim Versetzen eines schweren Steines ist die Selbstsperrung sehr wertvoll. Der ihn handhabende Arbeiter braucht ihn nicht vorsichtig festzuhalten, sondern kann seine volle Aufmerksamkeit auf die genaue Einstellung der Last richten, indem er durch Ziehen an der einen oder anderen Kette die Last bald hebt, bald senkt, wie es erwünscht ist.

12. Rollwiderstand der Walzen und Räder. Gleichmäfsige Bewegung der Fuhrwerke.

Wird eine starre zylindrische Walze auf eine starre wagerechte Ebene gelegt, so findet die Berührung längs einer Zylinderseite statt (Fig. 331). Das Gewicht Q der Walze wird von dem Widerstand N der Ebene aufgehoben, und, versetzt man die Walze in eine Rollbewegung, wobei die Geschwindigkeit c des Mittelpunktes O gleich der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ der Drehbewegung ist, so ist an der Berührungsstelle A die Gesamtgeschwindigkeit $v = c - r\omega =$ Null, d. h. es findet kein Gleiten statt, und, da die sonstigen Kräfte Q und N sich aufheben, so kommt keine Reibung

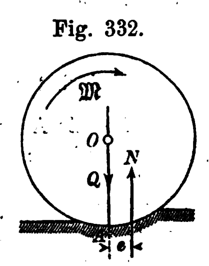
Fig. 331.



zur Wirkung. Daher sind die Bedingungen der gleichmäfsigen Drehbewegung und der gleichmäfsigen Verschiebung, mithin auch der gleichmäfsigen Rollbewegung erfüllt, d. h. es ist bei vollkommener Starrheit zur Unterhaltung der Rollbewegung keine weitere Kraft erforderlich.

Bei den wirklichen festen Körpern kann aber der Druck N nicht von einer Linie aufgenommen werden, sondern er verteilt sich auf eine Fläche, indem sowohl die Walze wie die Unterlage ihre Form ändern, sich gegenseitig zusammendrücken. Diejenigen Teile der Bahn, welche die Walze schon überrollt hat, kehren in den meisten Fällen nicht ganz in den früheren Zustand zurück; sie sind um ein gewisses Mafs dauernd niedergewalzt. Infolgedessen liegt der vor der Walze befindliche Teil der Unterlage höher als der andere; der Druck N verteilt sich nicht gleichmäfsig zu beiden Seiten der Walzenmitte, vielmehr überwiegt der Gegendruck auf der Vorderseite. Dadurch verschiebt sich dann der Gesamtdruck N nach vorn, so dafs er nicht mehr mit Q zusammenfällt, sondern mit Q ein Kräftepaar $N \cdot e$ bildet (Fig. 332), das **Moment des Rollwiderstandes**. Zur Unterhaltung der gleichmäfsigen Rollbewegung ist daher ein treibendes Moment

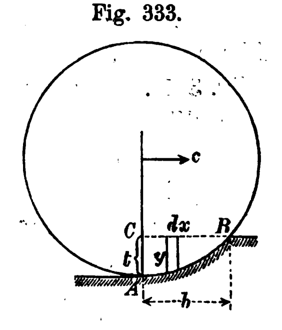
Fig. 332.



1) $\mathfrak{M} = Ne$ erforderlich.

Zur Beurteilung der Verteilung des Druckes N auf die Unterstützungsfläche darf man wohl für die meisten Fälle die vereinfachende Annahme machen, dafs nur die Unterlage eine Formänderung erfährt, während die Walze ihre runde Form behält. Zuerst werde der Fall betrachtet, dafs der von der Walze niedergedrückte Teil der Unterlage sich gar nicht wieder elastisch hinter ihr hebt, sondern niedergedrückt verbleibt (Fig. 333), wie es bei einem tonigen oder sandigen Wege etwa stattfinden wird. Den Gegendruck solcher Stoffe pflegt man mit der Eindrückungstiefe y verhältnisgleich zu nehmen. Ist ψ der Gegendruck der Längeneinheit der Horizontalprojektion für eine Tiefe gleich Eins, so hat er bei der Tiefe y den Wert ψy, und es ist dann der Gegendruck einer Breite dx: $\psi y\, dx$ und der gesamte Druck

Fig. 333.



$$N = \psi \int y\, dx = \psi \cdot ABC.$$

Selbstverständlich geht dann auch N durch den Schwerpunkt der Fläche ABC.

Weil nun AB in den wichtigeren Fällen ein kleiner Bogen ist, so kann er annähernd als ein Parabelstück vom Parameter r (= dem Halbmesser des Rollkreises) betrachtet werden. Dann wird, wenn b und t die beiden Projektionen von AB, $b^2 = 2rt$, $t = b^2 : (2r)$ und

$$2)\qquad N = \psi \cdot {}^2/_3\, b\, t = {}^1/_3\, \psi \frac{b^3}{r},$$

$$\text{daher}\quad b^3 = \frac{3\,N r}{\psi}.$$

Der Abstand e der Kraft N von dem Mittelpunkt ist (S. 155)

$$3)\qquad e = {}^3/_8\, b = {}^3/_8 \sqrt[3]{\frac{3\,N r}{\psi}}.$$

Ist die Unterlage aber nicht so vollkommen bildsam oder plastisch, dafs jeder erzeugte Eindruck in voller Gröfse bleibt; kann vielmehr ein gewisser Grad von Elastizität vorausgesetzt werden, so hebt sich die um die Tiefe t_1 eingedrückte Unterlage hinter der Walze um t_2 wieder empor (Fig. 334) und leistet dann entsprechende Gegendrücke.

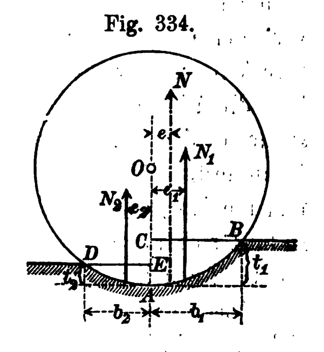


Fig. 334.

Dann wird der Druck auf der Vorderseite

$$N_1 = \psi\, {}^2/_3\, b_1\, t_1 = {}^1/_3\, \psi \frac{b_1^{\,3}}{r},$$

der auf der Rückseite

$$N_2 = {}^1/_3\, \psi \frac{b_2^{\,3}}{r}.$$

Ferner ist $\quad b_1^{\,3} = \dfrac{3\,N_1 r}{\psi}; \quad b_2^{\,3} = \dfrac{3\,N_2 r}{\psi}.$

$$4)\qquad \text{Setzt man}\quad b_2 = n\, b_1,$$

so ist n von dem Grade der Elastizität der Unterlage abhängig. Dann kann man $N_2 = \dfrac{1}{3}\, \psi\, n^3 \dfrac{b_1^{\,3}}{r}$ schreiben. Somit wird der Gesamtdruck

$$5)\qquad N = N_1 + N_2 = \frac{1}{3}\, \psi \frac{b_1^{\,3}}{r} (1 + n^3) \quad \text{und}$$

$$6)\qquad b_1 = \sqrt[3]{\frac{3\,N r}{\psi\,(1 + n^3)}}.$$

Die Abstände der Kräfte N_1 und N_2 von dem Mittelpunkt O betragen $e_1 = {}^3/_8\, b_1$; $e_2 = {}^3/_8\, b_2 = {}^3/_8\, n\, b_1$. Für die Mittelkraft N gilt dann die Momentengleichung in Bezug auf O

$$-N e = -N_1 e_1 + N_2 e_2 = -{}^3/_8\, b_1 (N_1 - n\, N_2),$$

daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor ${}^1/_3\, \psi : r$ in allen Gliedern fortläfst,

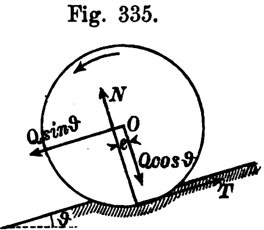
$$7)\qquad e = {}^3/_8\, b_1 \frac{1 - n^4}{1 + n^3} = {}^3/_8 \sqrt[3]{\frac{3\,N r}{\psi\,(1 + n^3)}}\, \frac{1 - n^4}{1 + n^3}.$$

Für $n = 0$ entsteht wieder der Wert der Gl. 3.

Hiernach ist e in verwickelter Weise von ψ und n, d. h. von der Beschaffenheit der Unterlage, oder, weil die Zusammendrückung in Wirklichkeit eine gegenseitige ist, von den Stoffen der Walze und der Unterlage abhängig, aufserdem aber auch von der Gröfse des Druckes N und von dem Halbmesser r des Rollkreises. Hat man aber e für einen Wert von N und r durch unmittelbare Messung oder auf mittelbarem Wege gefunden, so bringt eine Änderung von N oder von r nur geringe Änderung von e hervor, da Nr schon auf das Achtfache wachsen mufs, wenn e sich verdoppeln soll. Daher zieht man es vor, für eine Gruppe praktisch wichtiger Fälle bei Mittelwerten von N und r die Gröfse e einmal zu bestimmen und diese Länge e dann für andere ähnliche Fälle innerhalb gewisser Grenzen unverändert beizubehalten.

Die Ermittelung der Gröfse e kann durch Versuche in ähnlicher Weise erfolgen, wie man die Reibungsziffer mittels der schiefen Ebene (S. 216) feststellt. Gibt man der Rollbahn eine veränderliche Neigung, oder hat man eine genügende Anzahl von Strecken mit verschiedenen Neigungen, legt die Walze auf und stellt durch Versuche denjenigen Neigungswinkel ϑ der Bahn fest, bei welchem sich eine gleichmäfsige Rollbewegung der Walze erhält, so läfst sich mittels dieses Rollwinkels ϑ die Gröfse e berechnen (Fig. 335).

Fig. 335.



Das Gewicht Q der Walze zerlegt sich in $Q \sin \vartheta$ und $Q \cos \vartheta$. Der Druck N der Bahn geht um e an O vorbei. Aufserdem tritt nun noch die Reibung T an der Bahn auf. Diese vier Kräfte müssen den Gleichgewichtsbedingungen genügen, daher

$$N = Q \cos \vartheta; \quad T = Q \sin \vartheta .$$

Die beiden auftretenden Kräftepaare müssen sich aufheben, daher

$$Q \cos \vartheta \, e = Q \sin \vartheta \, r \quad \text{oder} \quad e = r \operatorname{tg} \vartheta ,$$

wofür man wegen der Kleinheit des Winkels ϑ auch

8) $$e = r\vartheta \quad \text{schreiben kann.}$$

Für Walzen und Bahn aus nicht sehr hartem
Holze ist etwa . . . . $e = 0{,}001^{\mathrm{m}}$,
bei sehr hartem Holze . . . . $e = 0{,}0005^{\mathrm{m}}$,
bei Eisenbahnwagenrädern auf Schienen . . . $e = 0{,}0005^{\mathrm{m}}$.

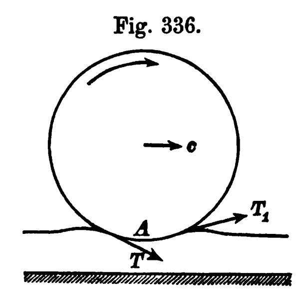
Danach beträgt der Rollwinkel im letzteren Falle, wenn $r = 0{,}5^{\mathrm{m}}$, $\vartheta = 0{,}0005 : 0{,}5 = 0{,}001 = 1 : 1000$, d. h. auf einem Gefälle von $1 : 1000$ kann eine Eisenbahnwagenachse durch ihr Gewicht gleichmäfsig rollen.

Nach den vorstehenden Betrachtungen würde der Rollwiderstand verschwinden, wenn die zusammendrückbare Fahrbahn sehr elastisch, annähernd $n = 1$ wäre, indem dann $e =$ Null entsteht. Man könnte glauben, dafs eine Kautschukplatte oder auch eine Unterlage von Stahl in solchem Mafse elastisch wäre, dafs dafür nahezu $n = 1$ gesetzt werden müfste. Damit steht nun freilich die Erfahrung im Widerspruche, denn bei dem Rollen einer eisernen Walze auf einer Kautschukplatte zeigt sich ein ziemlich erheblicher Widerstand, oder es ist eine ziemlich erhebliche Neigung ϑ erforderlich, damit ein gleichmäfsiges Rollen auf schiefer Ebene stattfinden kann.

Diese Erscheinung erklärt sich in folgender Weise. Wenn auch die Bahn von Kautschuk bezw. von Stahl so elastisch ist, dafs nach einiger Zeit keine Spur des Hinüberrollens mehr bemerkt wird, so erfolgt die Rückkehr in die ursprüngliche Form niemals sofort, sie erfordert vielmehr immer eine gewisse Zeit. Daher wird die Oberfläche der Fahrbahn dicht hinter der Walze immer etwas tiefer liegen als vor derselben und erst später, wenn die Walze sich von der Stelle entfernt hat, zur ursprünglichen Höhe zurückkehren.

Auch ist die Rollbewegung nach Versuchen von Prof. Osborne Reynolds im Jahre 1875 (Philosophical transactions, Bd. 166; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1877, S. 417) stets mit einem Gleiten verbunden. Die Strecke s, welche eine eiserne Walze vom Halbmesser r auf einer Kautschukplatte bei einer Umdrehung zurücklegt, zeigt sich kleiner als der Umfangsweg $2 r \pi$. Mit dem Zusammendrücken der Kautschukplatte ist vor und hinter der Zusammendrückung eine wulstartige Erhebung verbunden (Fig. 336). In der Nähe des Punktes A wird vielleicht kein Gleiten stattfinden, wohl aber zu beiden Seiten; aus dem Gleiten entstehen dann Reibungswiderstände T und T_1, die ein Widerstandsmoment liefern. Hiernach darf auch für elastische Bahnen die Formel 1 (S. 274) für den Rollwiderstand beibehalten werden, solange eine bessere nicht gefunden ist.

Fig. 336.

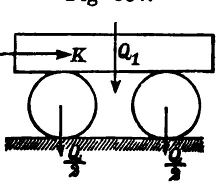


Wird eine Last Q_1 auf Walzen vom Gesamtgewichte Q fortgeschoben (Fig. 337), so tritt unten wie oben an den Walzen ein Rollwiderstand auf; die erforderliche Kraft ist dann

$$K = \left\{ Q_1 e_1 + (Q + Q_1) e \right\} : (2 r); \tag{9}$$

denn die Kraft K überträgt sich durch Reibung auf die oberen Teile der Walzen und bildet mit den unten an den Walzen auftretenden Reibungswiderständen ein Kräftepaar vom Hebelarme $2 r$; e und e_1 sind die Arme der Rollwiderstände unten bezw. oben.

Fig 337.



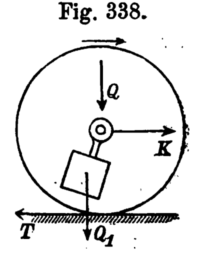
Sind alle in Frage kommenden Teile aus sehr hartem Holz, ist $Q_1 = 1000^{kg}$, $Q = 50^{kg}$, $r = 0{,}1^{m}$, so wird

$$K = \frac{1000 \cdot 0{,}0005 + 1050 \cdot 0{,}0005}{0{,}2} = 5{,}1^{kg}.$$

Hieraus erkennt man die Zweckmäfsigkeit der Walzen zum Fortschaffen schwerer Körper (eiserner oder steinerner Bauteile).

Bei den **Fuhrwerken** nun ist die Last des Wagenkastens mittels Achslager auf die Achsen der Räder gestützt, und da der Wagenkasten wohl an der Verschiebung, nicht aber an der Drehung der Walze teilnimmt, so findet an den Zapfen vom Durchmesser d eine Zapfenreibung statt. Wir wollen zunächst eine einzige Wagenachse von dem Gewichte Q betrachten und an ihr eine Last Q_1 aufgehängt denken (Fig. 338). (Das Gehänge stellt sich dann wegen des Zapfenreibungsmomentes $\frac{1}{2} f Q_1 d$ etwas schief.) Der Bodendruck beträgt $Q + Q_1$, daher das Moment des Rollwiderstandes $(Q + Q_1) e$. Die Zugkraft K auf wagerechter Ebene veranlafst, dafs der Zapfendruck etwas gröfser wird, doch hat dieser Umstand keine Bedeutung. An der Fahrbahn entsteht eine Reibung T, welche mit K das treibende Kräftepaar liefert: es ist dann mit R als Radhalbmesser:

Fig. 338.



$$KR = \frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1) e, \quad \text{so dafs}$$

$$K = \frac{\frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1) e}{R} \quad \text{wird.} \tag{10}$$

Diese Formel bleibt auch gültig, wenn die Last des Wagenkastens Q_1 auf mehrere Achsen vom Gesamtgewichte Q verteilt ist. Genauer bedeutet Q das Gewicht der rollenden, Q_1 dasjenige der nur fortschreitenden Teile. Bei gewöhnlichen Strafsenfuhrwerken bezieht sich Q nur auf die Räder, während die Achsen zu Q_1 gehören; bei den gewöhnlichen Eisenbahnfuhrwerken dagegen ist die Achse mit den Rädern fest verbunden, so dafs Q das Gewicht der Achsen und Räder bedeutet.

Nach Gl. 10 steht die erforderliche Zugkraft K im umgekehrten Verhältnisse zu dem Radhalbmesser R; zur Verminderung von K mufs man daher R so grofs machen, wie die sonstigen Umstände und Rücksichten gestatten.

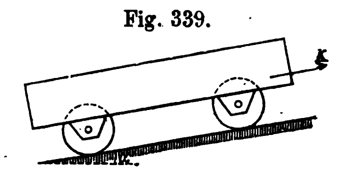
Beispiel: An einem zweiachsigen Eisenbahnwagen wiegen die beiden Achsen mit den Rädern $Q = 2000^{kg}$, die übrigen Teile nebst der Last $Q_1 = 8000^{kg}$; der Radhalbmesser sei $R = 0{,}5^{m}$, der Zapfendurchmesser $d = 0{,}1^{m}$, die Reibungsziffer $f = 0{,}08$, die Gröfse $e = 0{,}0005^{m}$, dann ist die auf wagerechter gerader Bahn erforderliche Zugkraft

$$K = \frac{4000 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}1}{0{,}5} + 10000 \cdot \frac{0{,}0005}{0{,}5} = 48 + 10 = 58^{kg},$$

wovon 48^{kg} durch Zapfenreibung, 10^{kg} durch Rollwiderstand erfordert werden.

Soll das Fuhrwerk gleichmäfsig eine Steigung unter dem Winkel α hinan gezogen werden (Fig. 339), so bleibt der ganze Zapfendruck $= Q_1$, der Normalwiderstand N beträgt aber nur $(Q_1 + Q) \cos \alpha$; doch ist $\cos \alpha$ bei allen Bahnen und Wegen, die frei (ohne Seil oder Zahnstange) befahren werden, von der Einheit so wenig verschieden, dafs Zapfenreibung + Rollwiderstand wiederum $= K$ gesetzt werden können. Es tritt aber nun doch die schräg abwärts gerichtete Seitenkraft der Schwere $Q \sin \alpha$ und $Q_1 \sin \alpha$ auf, die beide von K_1 mit überwunden werden müssen. Daher ist die jetzt erforderliche Zugkraft

Fig. 339.



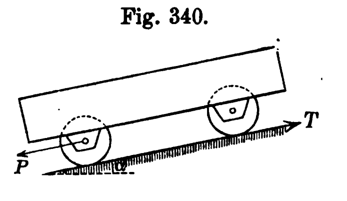
$$11) \qquad K_1 = (Q + Q_1) \sin \alpha + K,$$

worin aber α statt $\sin \alpha$ geschrieben werden kann.

Diese Kräfte K und K_1 müfsten nach dem bisherigen (Fig. 338) eigentlich an den Mittellinien der Achsen angreifen. Bringt man sie aber in beliebiger Höhe an dem Fuhrwerk an, so wird durch diese Verschiebung nur die Verteilung der Last Q_1 auf die beiden Achsen etwas geändert, im übrigen bleibt die Wirkung die gleiche.

Bewegt sich das Fuhrwerk gleichmäfsig abwärts und wird auf dasselbe (etwa mittels eines Seiles) eine hemmende Kraft K_2 ausgeübt, so ist $(Q + Q_1)\,\alpha - K_2$ die gesamte treibende Kraft P mit dem Sinn abwärts (Fig. 340). Die Neigung α hat einen gewissen Einflufs auf die Verteilung der Last Q_1 auf die beiden Achsen; davon abgesehen, kann man sich aber die gesamte Kraft P in der Achsenmitte angreifend denken. An den Berührungsstellen

Fig. 340.



der Räder mit der Bahn tritt eine gesamte Reibung $T = P$ auf und bildet mit P das Kräftepaar PR zur Überwindung der Widerstandsmomente $\frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1) e$, und da letztere Summe $= KR$ (Gl. 10), so ist

$$(Q + Q_1) \alpha - K_2 = K,$$

oder die erforderliche Hemmkraft

$$K_2 = (Q + Q_1) \alpha - K. \tag{12}$$

Für ein gewisses Gefällverhältnis $\alpha = \alpha_0$ reicht $(Q + Q_1) \alpha_0$ gerade zur Überwindung der Widerstände hin, so dafs die erforderliche Hemmkraft $K_2 = 0$ wird. Dieses Gefälle heifst die **Gleichgewichtsneigung** α_0, u. zw. ist

$$\alpha_0 = \frac{K}{Q + Q_1}. \tag{13}$$

Zugleich ist dann aber auch

$$K = (Q + Q_1) \alpha_0, \tag{14}$$

d. h. **die auf wagerechter Ebene erforderliche Zugkraft** K **gleich dem Gesamtgewichte** $(Q + Q_1)$ **mal der Gleichgewichtsneigung** α_0.

Durch Vorrichtungen zur Messung der Zugkraft oder durch Ermittelung der Gleichgewichtsneigung kann die für einen Wagen erforderliche Zugkraft K ziemlich scharf gemessen werden; von den beiden Widerständen aber, die von K zu überwinden sind, kann man nur die Zapfenreibung einigermafsen befriedigend berechnen, während der Betrag des Rollwiderstandes bisher nur sehr unvollkommen berechnet werden kann, wie aus den Bemerkungen auf S. 277 ersichtlich ist. Man zieht es deshalb vor, nur den Gesamtwiderstand K durch Versuche eingehender zu prüfen und K in ein Verhältnis zu dem Gesamtgewichte $Q + Q_1$ des Fuhrwerkes zu bringen, trotzdem nach Gl. 10 der Wert K nicht genau verhältnisgleich mit $Q + Q_1$ ist. Diese Verhältniszahl ist nach Gl. 14 aber die Gleichgewichtsneigung α_0. Mit deren Einführung wird dann auf einer Steigung α nach Gl. 11

$$K_1 = (Q + Q_1)(\alpha + \alpha_0), \tag{15}$$

auf einem Gefälle α nach Gl. 12 die Haltkraft

$$K_2 = (Q + Q_1)(\alpha - \alpha_0). \tag{16}$$

Auf Grund dieser Vereinfachungen bekommt nun die Gleichgewichtsneigung α_0 eine ähnliche Bedeutung, wie sie der Reibungs-

winkel φ bei gleitender Bewegung hat. Da bei Fuhrwerken α_0 stets ein kleiner Bruch, so ist $\sin \alpha_0 = \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ zu setzen, ebenso wie bei kleinem Reibungswinkel $\sin \varphi = \varphi = \operatorname{tg} \varphi = f$ gesetzt werden konnte. Die Gleichgewichtsneigung α_0 ist zugleich die Widerstandsziffer des Fuhrwerkes, welche man nur mit dessen Gewicht zu multiplizieren braucht, um den Gesamtwiderstand auf wagerechter Bahn zu erhalten. Man braucht daher zur zahlenmäfsigen Berechnung der erforderlichen Zug- oder Haltkräfte K_1 und K_2 auf die rollenden Räder und die damit zusammenhängenden Widerstände keine Rücksicht mehr zu nehmen, sondern kann, weil diese Widerstände in dem Wert α_0 stecken, bei gleichmäfsiger Bewegung das Fuhrwerk wie einen Schlitten vom Gesamtgewichte $Q + Q_1$ auf sehr glatter Bahn mit einer Reibungsziffer $f = \alpha_0$ betrachten. Die Kraft $(Q + Q_1)\,\alpha_0$ ist dann stets entgegengesetzt der Bewegung, $(Q + Q_1)\,\alpha$ stets abwärts anzubringen.

Beispiel: Für den Eisenbahnwagen auf S. 279 ist $K = 58$, $Q + Q_1 = 10\,000$, daher $\alpha_0 = 0{,}0058 = 1 : 172$, wofür man $\alpha_0 = 0{,}006 = 1 : 170$ setzen kann. Ein Zug aus 40 derartigen Wagen hat ein Gewicht $Q + Q_1 = 400\,000$ kg. Es ist dafür auf wagerechter Bahn $K = 400\,000 \,.\, 0{,}006 = 2400$ kg. Auf einer Steigung $\alpha = 1 : 800$ ist dann die Zugkraft nötig (Fig. 341)

Fig. 341.

$$K_1 = 400\,000 : 800 + 2400 = 2900 \text{ kg};$$

soll der Zug aber auf derselben Rampe abwärts fahren, so wirkt 500 abwärts, der Widerstand $= 2400$ kg aufwärts; es ist also noch in der Richtung der Bewegung eine Zugkraft $2400 - 500 = 1900$ kg nötig. — Für $\alpha = \alpha_0$ ist bei der Abwärtsbewegung keine bewegende oder hemmende Kraft erforderlich, dagegen ist bei der Aufwärtsbewegung $K_1 = (Q + Q_1)\,\alpha_0 + K = 2\,K$, d. h. doppelt so grofs wie auf wagerechter Bahn. — Ist $\alpha > \alpha_0$, z. B. $\alpha = 1 : 100$, so wird für Aufwärtsfahrt eine Zugkraft $K_1 = 400\,000 : 100 + 2400 = 6400$ kg, für Abwärtsfahrt eine Hemmkraft (Gl. 16) $K_2 = 400\,000 : 100 - 2400 = 1600$ kg nötig. Diese wird erzeugt, indem man Bremsbacken oder Bremsklötze mit solcher Kraft an die Räder prefst, dafs dadurch eine Gesamtreibung an den Umfängen der Räder im Betrage von K_2 entsteht. Diese wirkt mit dem Widerstandsmomente $K_2 R$ an den Achsen wie eine vielfach vergröfserte Zapfenreibung und erfordert in ähnlicher Weise wie diese (Fig. 338) ein im Sinne der Drehung der Achsen wirkendes Kräftepaar $K_2 R$, indem an den Stellen der Berührung der Räder mit den Schienen eine der Bewegung entgegengesetzt wirkende Reibungskraft von der Gröfse K_2 hervorgerufen wird, welche nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (S. 166) auf die Bewegung des Fuhrwerkes im ganzen gerade so einwirkt, als ob sie im Schwerpunkte des

Fuhrwerkes oder in den Achsmitten oder irgendwo am oberen Teile des Wagenkastens angriffe.

In den bisherigen Betrachtungen und Beispielen sind als Widerstände nur Zapfenreibung und Rollwiderstand berücksichtigt. Dies genügt nur für Bewegung mit geringer Geschwindigkeit. Denn es tritt noch ein Luftwiderstand hinzu, der bei langsamer Bewegung des Zuges gering, bei schneller Bewegung aber sehr bedeutend ist. Auf diesen Widerstand kann hier nicht eingegangen werden; es sei nur erwähnt, dafs bei schnell fahrenden Personenzügen die Widerstandsziffer oder Gleichgewichtsneigung α_0 auf 0,01 steigt, dafs also der Gesamtwiderstand bei voller Geschwindigkeit um das Mehrfache gröfser ist wie bei langsamer Bewegung.

Für Strafsenfuhrwerke ist die Ziffer α_0 erheblich gröfser als für Eisenbahnwagen. Einmal sind die Achslager oder Achsbüchsen nicht so vollkommen; namentlich aber ist die Fahrbahn eine viel weniger regelmäfsige, so dafs der Rollwiderstand ganz bedeutenden Einflufs gewinnt. Auch bei diesen Fuhrwerken kann man nur den Gesamtwiderstand durch α_0 ausdrücken. Für bestes Steinpflaster ist etwa $\alpha_0 = 1:80$, für gewöhnliche Landstrafsen $\alpha_0 = 1:30$. Soll nun auf Landstrafsen im Flachlande, wo die gewöhnlichen Fuhrwerke nicht mit Bremsen versehen sind, beim Abwärtsfahren ein Zurückhalten des Wagens durch die Pferde nicht nötig sein, so dürfen die vorkommenden Gefälle nicht stärker als die Gleichgewichtsneigung α_0 sein. Für $\alpha = \alpha_0$ läuft der Wagen abwärts frei, während die zum Aufwärtsziehen erforderliche Kraft doppelt so grofs ist wie auf der Wagerechten.

13. Die Schraube.

Die Schraubenspindel kann man betrachten als bestehend aus einem zylindrischen Kern, um den die Schraubengänge als nach einer Schraubenlinie gestaltete vorspringende Leisten herumgelegt sind. Die Schraubengänge bilden mit dem Kern einen festen Körper. Bei der flachgängigen Schraube hat der Schraubengang rechteckigen Querschnitt, bei der scharfgängigen Schraube ist seine Querschnittsform ein gleichschenkliges (nahezu gleichseitiges) Dreieck. Die Schraubenmutter ist ein fester Körper, der die Schraubenspindel mit geringem Spielraum umschliefst.

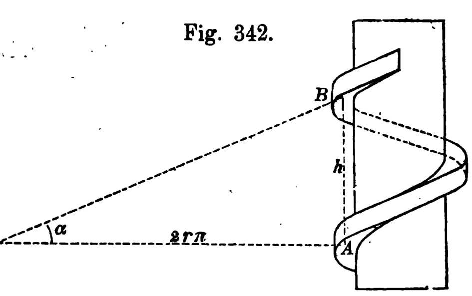


Fig. 342.

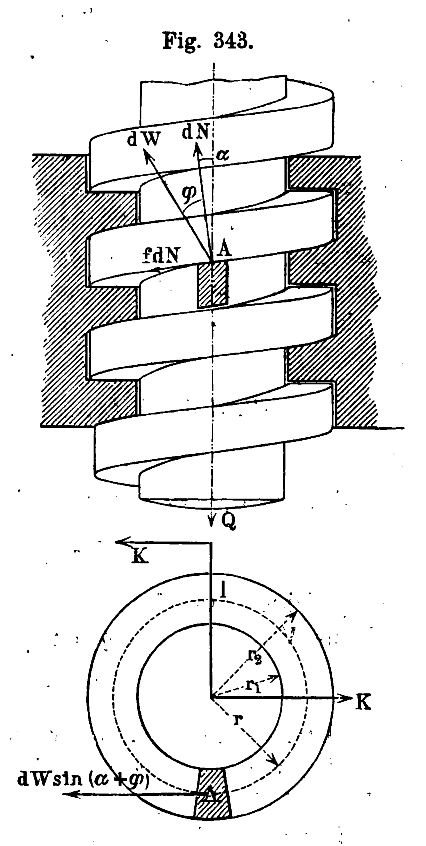
Wird die Schraubenmutter festgehalten, so kann die Schraubenspindel nur eine sog. Schraubenbewegung ausführen, indem mit der

Drehung um die Achse der Spindel eine Verschiebung längs derselben verbunden ist. Verfolgt man einen Schraubengang, an einem Punkt A (Fig. 342) beginnend, so weit, bis man bei B eine Stelle trifft, die mit A auf einer und derselben Zylinderseite liegt, so ist der Abstand $AB = h$ die Ganghöhe der Schraube; dies ist derjenige Weg, um welchen sich die Schraubenspindel während einer Umdrehung längs der Achse verschiebt. Befindet sich der Punkt A in einem Abstand r von der Achse, so ist die ebene Abwickelung der Schraubenlinie von A bis B eine geneigte Gerade mit den Projektionen h und $2r\pi$, mit einem Neigungsverhältnisse

1) $$\operatorname{tg} \alpha = h : (2r\pi).$$

Da nun h der für alle Teile der Spindel gleiche Verschiebungsweg längs der Achse bei einer Umdrehung ist, so werden die Schraubenlinien, auf denen sich die verschiedenen Punkte der Spindel bewegen, verschiedene Ansteigungsmittel α haben, u. zw. um so kleiner, je größer der Abstand r des Punktes von der Achse.

Fig. 343.



Je nachdem ein Gang oder mehrere Gänge sich um den Kern der Schraube gleichlaufend herumwinden, nennt man die Schraube ein- oder mehrgängig.

Flachgängige Schraube (Fig. 343). Auf die Spindel wirke eine (etwa abwärts gerichtete) Kraft Q in der Richtung der Achse. Es soll dasjenige Kräftepaar Kl berechnet werden, welches die Spindel in gleichmäßiger Schraubenbewegung erhält, so daß ihre Verschiebung dem Sinne der Kraft Q entgegengesetzt ist. Die Spindel stützt sich auf die Gänge der Schraubenmutter, erfährt von diesen Normal- und Reibungswiderstände, die

sich zu Gesamtwiderständen zusammensetzen. Die Widerstände verteilen sich auf die Breite des Schraubenganges, doch machen wir die vereinfachende Voraussetzung, daſs sie an dem Halbmesser $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ angreifend gedacht werden können. An einem Teilchen des Schraubenganges bei A wirkt ein Normaldruck dN, der gegen die Achse der Spindel um denselben Winkel α geneigt ist, welchen die mittlere Schraubenlinie mit der Querschnittsebene der Spindel bildet. dN setzt sich mit der Reibung $f \cdot dN$ zu dW zusammen, welches von dN um den Reibungswinkel φ abweicht, daher mit der Achsenrichtung der Schraube den Winkel $\alpha + \varphi$ bildet. dW liefert in der Richtung der Drehachse eine Seitenkraft $dW \cos(\alpha + \varphi)$, und die Summe aller dieser Seitenkräfte muſs der entgegengesetzten Kraft Q gleich sein, weil die Verschiebung gleichförmig erfolgen soll (s. A. Ritter, Technische Mechanik). Da nun α und φ für die ganze Erstreckung des Schraubenganges dieselben Werte haben, so ist

$$Q = \cos(\alpha + \varphi) \Sigma dW. \tag{2}$$

Die wagerechten Seitenkräfte von dW sind Kräfte $dW \sin(\alpha + \varphi)$, welche im Grundrisse sämtlich Tangenten an den Kreis vom Halbmesser r bilden. In Bezug auf die Achse der Spindel haben sie eine Momentensumme $r \sin(\alpha + \varphi) \Sigma dW$, welches Widerstandsmoment durch das treibende Kräftepaar Kl überwunden werden muſs, also

$$Kl = r \sin(\alpha + \varphi) \Sigma dW. \tag{3}$$

Teilt man Gl. 3 durch Gl. 2, so entsteht $\frac{Kl}{Q} = r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ oder

$$\boldsymbol{Kl = Qr} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \tag{4}$$

was sich mit $\operatorname{tg} \varphi = f$, für die Rechnung bequemer, schreiben läſst:

$$\boldsymbol{Kl = Qr} \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}. \tag{5}$$

Für gleichmäſsige Abwärtsbewegung im Sinne der Kraft Q kehren sich die Vorzeichen von φ und f um:

$$\boldsymbol{K_1 l = Qr} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \boldsymbol{Qr} \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha}. \tag{6}$$

Alle Kräftepaare $K_2 l$, unter deren Einwirkung die Schraubenspindel im Ruhezustande verbleibt, liegen zwischen den Grenzen Kl und $K_1 l$.

Für $\alpha = \varphi$ ist $K_1 l = 0$, also $K_1 = 0$, d. h. es verhält sich in diesem Falle die Spindel ähnlich wie ein Körper, der auf schiefer

Ebene unter einem Neigungswinkel $\alpha = \varphi$ unter Einwirkung der Schwere ohne Kräfte K gleichmäfsig abwärts gleitet (S. 216). Für $\alpha < \varphi$ mufs der Körper durch eine abwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch ein Moment $(-K_1 l)$ abwärts bewegt werden, da die abwärts treibende Kraft der Schwere oder der Last Q geringer ist als die Reibungswiderstände. Für $\alpha > \varphi$ mufs der Körper durch eine aufwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch das Moment $K_1 l$ an beschleunigter Abwärtsbewegung verhindert werden. Im ersteren Falle nennt man das Gewinde „selbstsperrend“, in letzterem Falle „nicht selbstsperrend“.

Da die Kraft Q und das Moment Kl mit den Widerständen $[dW]$ im Gleichgewichte sind und da die Widerstände $[dW]$ nach dem Gesetze der Wechselwirkung entgegengesetzt auf die Schraubenmutter wirken, so übertragen sich Q und Kl auf die Schraubenmutter; soll nun letztere nicht in Bewegung geraten, so müssen an ihr Widerstände auftreten, welche dem Entgegengesetzten von Q und Kl gleichwertig sind.

Stützt sich die Mutter, ohne weiter festgehalten zu sein, auf eine ebene Unterlage AA (siehe Fig. 344), so mufs diese einen der Last Q entgegengesetzt gleichen Gesamtwiderstand N leisten, und es mufs unter der Wirkung desselben in der Stützebene ein dem Momente $K \cdot l$ entgegengesetzt gleiches Reibungsmoment $N \cdot f_1 \cdot r_1$ zustande kommen. Wird der mittlere Radius r_1 der Stützfläche hinreichend grofs bemessen, so läfst sich die letztere Bedingung stets sicher erfüllen. Nötigenfalls kann man das Reibungsmoment auch durch kegelförmige Gestaltung der Stützfläche entsprechend vergröfsern.

Soll das Heben der Last Q_1 bezw. die Axialbewegung der Spindel ohne Drehbewegung der letzteren durch Umdrehung der Schraubenmutter herbeigeführt werden, so mufs das aufzuwendende Kraftmoment auch das Reibungsmoment der Mutter auf ihrer Unterlage mit überwinden. Für die Aufwärtsbewegung mufs daher sein

$$7) \quad K \cdot l = Qr \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot f} + Q \cdot f_1 r_1 = Q\left(r \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - \operatorname{tg}\alpha f} + f_1 r_1\right)$$

und ebenso für die Abwärtsbewegung

$$8) \quad K_1 \cdot l = Qr \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot f} - Qf_1 r_1 = Q\left(r \frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot f} - f_1 r_1\right),$$

worin f_1 die etwa von f verschiedene Reibungsziffer der Schraubenmutter auf ihre Unterlage bedeutet.

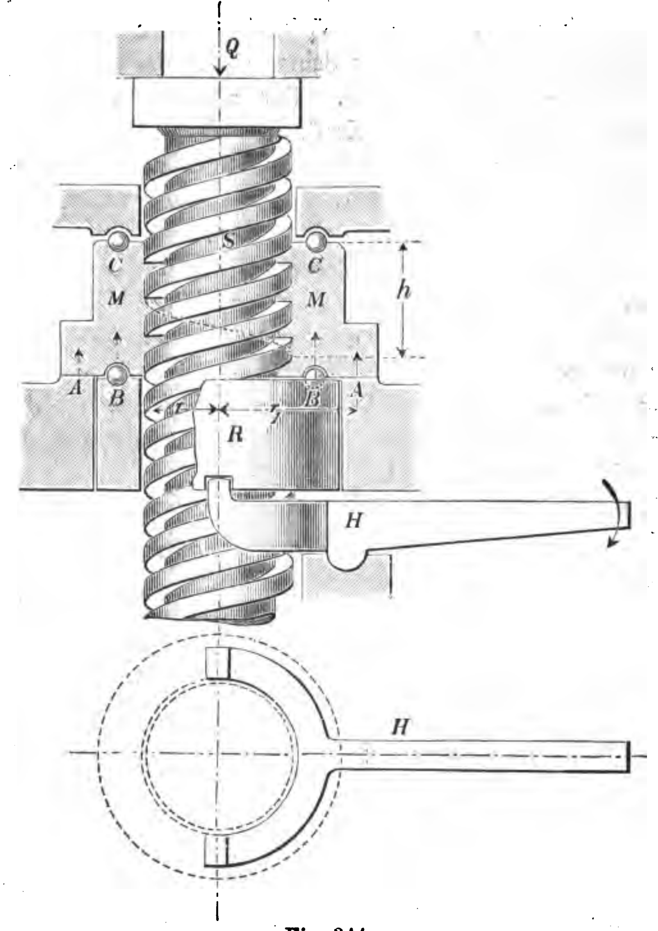


Fig. 344.

Je nachdem im Falle der Abwärtsbewegung

$$r \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot f} \lesseqgtr f_1 r_1 \quad \text{oder} \quad r_1 \gtreqless \frac{r}{f_1} \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + \operatorname{tg} \alpha f} \quad \text{ist,}$$

fällt das für die gleichmäfsige Bewegung aufzuwendende Kraftmoment $K_1 l \lesseqgtr 0$ aus, und ist dementsprechend die Schraubenmutter auf ihrer Unterlage selbstsperrend oder nicht selbstsperrend.

Von dieser Beziehung zwischen dem Steigungswinkel α des Gewindes und dem mittleren Radius r_1 der Stützfläche der Schraubenmutter macht man mit Vorteil Anwendung in den sog. „Stützspindeln“, wie sie z. B. als Sicherheitsorgane bei der Vertikalbewegung von Verkehrseinrichtungen, Aufzügen, Hubbrücken u. s. w. benutzt werden. (Vergl. Fig. 344.) Die Spindel S ist mit nicht sperrendem Gewinde versehen und um ihre Achse nicht drehbar. Wird der mittlere Radius r_1 der Stützfläche AA so bemessen, dafs $r_1 > \frac{r}{f_1} \frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot f}$, so findet die Last Q vermittelst der Spindel S und der Schraubenmutter M sicherere Unterstützung. Wird aber die Mutter etwa durch den Hebel H und den Stützring R um ein Geringes gehoben, so dafs in AA Berührung nicht mehr stattfindet, die Mutter vielmehr zwischen den Kugellagern BB und CC drehbar festgehalten ist, so vermindert sich das Reibungsmoment zwischen der Mutter und ihrer Unterstützung, so dafs erstere ihre Stützfähigkeit verliert und die nicht drehbare Spindel mit der Last Q in beliebiger Weise auf- und abwärts bewegt werden kann, wobei sich die Mutter um die Spindel einmal in einem, einmal im anderen Sinne dreht. Sobald aber die Mutter, sei es willkürlich, oder in automatischer Abhängigkeit von den Bewegungen des Gesamtapparates selbsttätig wieder auf die Stützfläche AA herabgelassen wird, steht die Spindel und Last wieder sicher fest.

Beispiel 1: Bei einer nicht selbstsperrenden Stützspindel sei $h = 15^{\text{cm}}$, $r = 7{,}5^{\text{cm}}$, $f = 0{,}10$, $f_1 = 0{,}10$. Dann erfordert die sichere Stützfähigkeit derselben $r_1 = \frac{7{,}5}{0{,}10} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - 0{,}10}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot 0{,}10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{2 \cdot 7{,}5 \cdot \pi} = 0{,}32$,

daher $r_1 = 16{,}0^{\text{cm}}$.

Gibt man der Stützfläche die Form eines Kegelmantels mit $\delta = 45^0$, $\sin\delta = 0{,}70$, so wird

$$r_1 = \sin\delta \cdot \frac{7{,}5}{0{,}10} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - 0{,}10}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot 0{,}10} = 11{,}2^{\text{cm}}.$$

Der **Wirkungsgrad** der flachgängigen Schraube ergibt sich, wenn man **eine** Umdrehung betrachtet, zu $\eta = \frac{Qh}{Kl\,2\pi}$, denn dabei wird der Angriffspunkt von Q um h gehoben, die Arbeit des Momentes Kl ist aber nach S. 247 gleich dem Momente mal dem Drehungswinkel. Da nun $h = 2r\pi\operatorname{tg}\alpha$, so wird mit Gl. 4:

$$9) \qquad \eta = \frac{Q\,2r\pi\operatorname{tg}\alpha}{Qr\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)\,2\pi} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Beispiel 2: Es sei $f = 0{,}15$. Wählt man nun $\operatorname{tg}\alpha$ ebenso grofs, so wird

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{0{,}15 + 0{,}15}{1 - 0{,}15 \cdot 0{,}15}, \quad \text{daher } \eta = \frac{0{,}15 \cdot 0.9775}{0{,}3} = 0{,}49.$$

In diesem Fall $\alpha = \varphi$ steht die Schraube an der Grenze der Selbstsperrung; im Zusammenhange damit ist ihr Wirkungsgrad annähernd $0{,}5$

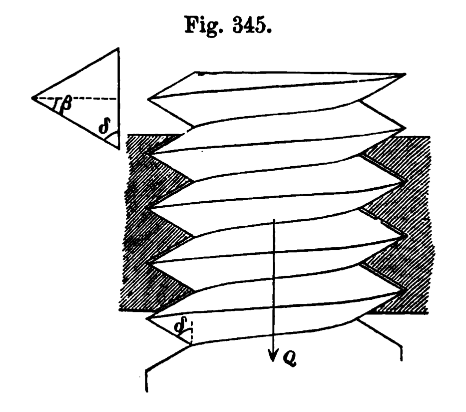
(vergl. S. 242). Bei den meisten Anwendungen der Schraube ist Selbstsperrung erwünscht; ist z. B. $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}07$, $f = 0{,}15$, so wird $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{0{,}07 + 0{,}15}{1 - 0{,}07 \cdot 0{,}15}$ und $\eta = \frac{0{,}07 \cdot 0{,}9895}{0{,}22} = 0{,}32$. Der Wirkungsgrad der Schraube ist daher nur ein geringer.

Bei kleinen Werten von f und $\operatorname{tg} \alpha$ kann $f \operatorname{tg} \alpha$ gegen 1 vernachlässigt werden, so dafs $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg} \alpha + f$; dann ergibt sich einfach $Kl = Qr(\operatorname{tg} \alpha + f)$ und $\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha}$. Dies ergibt z. B.

$$\text{für } f = \operatorname{tg} \alpha = 0{,}15: \quad \eta = 0{,}5;$$
$$\text{für } f = 0{,}15, \ \operatorname{tg} \alpha = 0{,}07: \quad \eta = 0{,}318.$$

Scharfgängige Schraube (Fig. 345). Bei dieser ist der Querschnitt des Schraubenganges ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel $2\beta = 55^0$. Der Übergang von der flachgängigen zur scharfgängigen Schraube ist hinsichtlich des Verhältnisses der wirkenden Kräfte ungefähr so zu beurteilen wie der Übergang von dem Spurzapfen mit ebener Tragfläche zu dem kegelförmigen Spurzapfen; es findet auch hier ein keilartiges Einpressen der Spindel in die (wenn auch nur annähernd) trichterförmigen Gänge der Schraubenmutter und dadurch eine Vergröfserung der Reibungswiderstände statt, die man am einfachsten berücksichtigt, indem man f, wo es in den Gleichungen der flachgängigen Schraube vorkommt, mit $f : \sin \delta$ oder mit $f : \cos \beta$ vertauscht. Denn δ (der halbe Keilnutenwinkel) ist die Neigung der Kante des Gewindequerschnittes gegen die Achse, mithin $\delta = 90^0 - \beta$. Behufs kürzester Schreibweise kann man auch den Reibungswinkel φ mit dem Winkel ψ vertauschen, wenn

Fig. 345.



$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi : \cos \beta = f : \cos \beta = f \sec \beta$$

(vergl. S. 221). Dann wird für die scharfgängige Schraube

$$8) \qquad Kl = Qr \operatorname{tg}(\alpha + \psi) = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha},$$

$$9) \qquad K_1 l = Qr \operatorname{tg}(\alpha - \psi) = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha - f \sec \beta}{1 + f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha}.$$

Selbstsperrung tritt jetzt ein für $\operatorname{tg}\alpha \leqq \operatorname{tg}\psi = f : \cos\beta$.

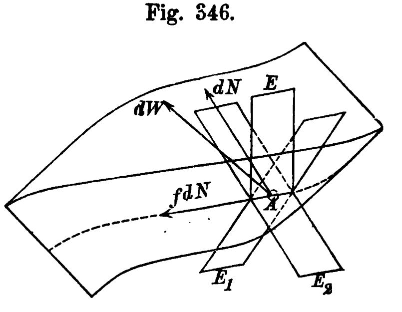
$$10) \qquad \eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\psi)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + f\sec\beta}(1 - f\sec\beta\operatorname{tg}\alpha).$$

Diese Gleichungen sind die allgemeineren; mit $\cos\beta = \sec\beta = 1$ entstehen daraus wieder Gl. 5, 6 und 7 für flachgängige Schrauben.

Beispiel 3: Für $r = 0{,}015\,\mathrm{m}$; $h = 0{,}003\,\mathrm{m}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}003}{2\cdot 0{,}015\cdot\pi} = 0{,}032$; $f = 0{,}15$; $\cos\beta = \cos 27^1/_2{}^0 = 0{,}887$; $f\sec\beta = 0{,}17$ und $l = 0{,}4\,\mathrm{m}$ wird $Kl = 0{,}003\,046\,Q$; $K = 0{,}0075\,Q$; $K_1 l = -0{,}0020\,Q$; $K_1 = -0{,}005\,Q$; $\eta = 0{,}16$.

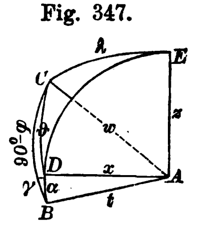
Die vorstehenden Gleichungen für die scharfgängige Schraube sind zur zahlenmäfsigen Berechnung völlig ausreichend, können aber in wissenschaftlicher Beziehung nur als Annäherungen gelten, denn der Übergang von der flachgängigen Schraube zur scharfgängigen, wie er auf S. 288 behandelt wurde, ist nicht ganz zutreffend, da das Gewinde der scharfgängigen Schraube nicht als ein Kegel angesehen werden darf. Wir fügen daher noch folgende schärfere Behandlung des Falles nach, wobei wir der Notiz von Zierold über die Ableitung des Verhältnisses zwischen Kraft und Last bei der Schraube mit scharfem Gewinde (Civilingenieur 1894, S. 155) folgen.

Fig. 346.



A sei (Fig. 346) ein Punkt der mittleren Schraubenlinie vom Halbmesser r. Durch ein Bogenteilchen dieser Schraubenlinie legen wir eine Ebene E, welche den Zylinder vom Halbmesser r bei A berührt. Durch dasselbe Bogenteilchen legen wir eine Berührungsebene E_1 an die gedrückte Schraubenfläche. Rechtwinklig zu ihr steht der Normaldruck dN; die Reibung $f\cdot dN$ ist tangential zur mittleren Schraubenlinie; der Gesamtwiderstand dW aus dN und $f\cdot dN$ liegt in einer Ebene E_2, welche auf E_1 rechtwinklig steht, weil sie durch dN geht und dN winkelrecht zu E_1 ist. Eine durch A gelegte Parallele zur Schraubenachse werde mit z bezeichnet, die Richtung der Kraft $f\cdot dN$ als Tangente an die Schraubenlinie mit t. Ferner legen wir durch A eine Gerade x; welche in der Ebene E liegt, u. zw. rechtwinklig zu z. Die Richtung von dW heifse w. Dann bilden w, x und t eine körperliche Ecke, und es entsteht, wenn man um A eine Kugelfläche beschreibt, das Kugeldreieck BCD (Fig. 347). Darin ist die Seite $BC = 90^0 - \varphi$, weil dW von $f\cdot dN$ um diesen Winkel abweicht, die Seite $BD = \alpha$, dem Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinie. Die Seite CD zwischen w und x werde ϑ, der

Fig. 347.



Winkel bei B an der Kante t aber γ genannt; dies ist der Winkel zwischen den Ebenen E und E_2. Für das Kugeldreieck gilt dann nach dem Cosinus-Satze, weil ϑ und γ einander gegenüber liegen:

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos(90^0 - \varphi) + \sin\alpha\sin(90^0 - \varphi)\cos\gamma$$

$$\text{11)} \qquad \text{oder} \quad \cos\vartheta = \cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi\cos\gamma.$$

Die Geraden z, t und w bilden eine räumliche Ecke, der das Kugeldreieck BCE entspricht. Der Bogen BE fällt mit BD teilweise zusammen, da t, x und z in der Ebene E liegen. In BCE ist wieder $BC = 90^0 - \varphi$, $BE = 90^0 + \alpha$ (denn x und z bilden miteinander einen rechten Winkel, x und t den Winkel α). Die Seite CE zwischen w und z werde λ genannt. In BCE liegen sich γ und λ gegenüber, daher ist

$$\cos\lambda = \cos(90^0 + \alpha)\cos(90^0 - \varphi) + \sin(90^0 + \alpha)\sin(90^0 - \varphi)\cos\gamma$$

$$\text{12)} \qquad \text{oder} \quad \cos\lambda = -\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\cos\gamma.$$

Da dW mit x und z die Winkel ϑ bezw. λ einschliefst, so wird, entsprechend den Gl. 2 und 3, S. 284:

$$Q = \cos\lambda\,\Sigma dW;$$

$$Kl = r\cos\vartheta\,\Sigma dW \quad \text{und}$$

$$Kl = Qr\,\frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda} = Qr\cdot\frac{\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi\cos\gamma}{-\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\cos\gamma},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\varphi$ teilt:

$$\text{13)} \qquad Kl = Qr\,\frac{f + \operatorname{tg}\alpha\cos\gamma}{-f\operatorname{tg}\alpha + \cos\gamma} = Qr\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + f\sec\gamma}{1 - f\sec\gamma\operatorname{tg}\alpha}.$$

Es mufs nun noch $\sec\gamma$ ermittelt, bezw. gezeigt werden, dafs $\sec\gamma$ sehr annähernd $= \sec\beta$ ist, wodurch Gl. 13 in Gl. 8 übergehen würde.

Die drei Ebenen E, E_1 und E_2 gehen sämtlich durch t. E_2 ist rechtwinklig zu E_1; da nun der Winkel zwischen E und E_2 γ ist, so schliefsen deren Normalen n_1 und n_2 ebenfalls diesen Winkel ein, und weil E_1 und E_2 zueinander winkelrecht, so sind es auch deren Normalen n_1 und n_2. Da die drei Ebenen durch die Tangente t gehen, so stehen die drei Normalen n, n_1 und n_2 (Fig. 348) sämtlich rechtwinklig zur Tangente t, und zwischen den Normalen n und n_1 findet sich der Winkel $90^0 - \gamma$, so dafs die Ebenen E und E_1 ebenfalls den Winkel $90^0 - \gamma$ miteinander bilden.

Fig. 348.

Nennt man g die durch A gelegte Erzeugende der Schraubenfläche, welche mit z den Winkel $90^0 - \beta$ einschliefst, so bilden g, t und z eine Ecke entsprechend dem Kugeldreieck FGH (Fig. 349). FH liegt in der Ebene E durch z und t, GH in einer Ebene durch die Schraubenachse, welche zu E rechtwinklig, weshalb der Winkel

bei H (an der Kante z) ein Rechter. t ist gegen z um $FH = 90^0 - \alpha$, g gegen z, wie oben schon gesagt, um $GH = 90^0 - \beta$ geneigt; nennt man noch die Seite $FG = \eta$, so gibt der Sinus-Satz:

Fig. 349.

$$\frac{\sin(90^0 - \gamma)}{\sin 90^0} = \frac{\sin(90^0 - \beta)}{\sin \eta} \quad \text{oder}$$

$$14) \qquad \cos\gamma = \frac{\cos\beta}{\sin\eta} \quad \text{und} \quad \sec\gamma = \frac{\sin\eta}{\cos\beta};$$

der Cosinus-Satz:

$$\cos\eta = \cos(90^0 - \beta)\cos(90^0 - \alpha) + \sin(90^0 - \beta)\sin(90^0 - \alpha)\cos 90^0$$

$$15) \qquad \text{oder} \quad \cos\eta = \sin\beta\sin\alpha$$

$$\text{und} \quad \sin\eta = \sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\alpha}, \quad \text{mithin wegen Gl. 14}$$

$$\sec^2\gamma = \frac{1 - \sin^2\beta\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} = \sec^2\beta - \operatorname{tg}^2\beta\sin^2\alpha$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\beta\sin^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha(\sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta) = \cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta).$$

Hiermit wird (Gl. 13)

$$16) \qquad Kl = Qr\frac{\operatorname{tg}\alpha + f\cos\alpha\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}{1 - f\sin\alpha\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}.$$

Bei den meist kleinen Ansteigungswinkeln α ist nun aber der Winkel η zwischen g und t (Fig. 349) nur wenig von einem Rechten verschieden, daher $\sin\eta$ fast $= 1$ und deshalb (Gl. 14) $\sec\gamma$ nur wenig kleiner als $\sec\beta$, oder, mit anderen Worten, es ist wegen der Kleinheit von α annähernd $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ und

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\beta = \sec^2\beta,$$

womit Gl. 16 in Gl. 8 übergeht.

Für das Beispiel auf S. 289 wird nach Gl. 16 $Kl = 0{,}00303\,Q$ (gegen $0{,}003046\,Q$ nach Gl. 8). Der Unterschied ist daher sehr gering. Es ist hiernach durchaus zu empfehlen, bei kleinen Winkeln α stets Gl. 8—10 anzuwenden.

Die Reibungswiderstände sind (nach S. 288) bei scharfgängigen Schrauben gröfser als bei flachgängigen. Soll daher eine Schraube zur Bewegungsübertragung (als einfache Maschine) dienen, so wählt man gewöhnlich eine flachgängige Schraube, während die scharfgängige Schraube als Befestigungsmittel den Vorzug verdient, weil in diesem Falle die grofsen Reibungswiderstände gerade die Sicherheit gegen unerwünschte Lösung der Befestigung bilden.

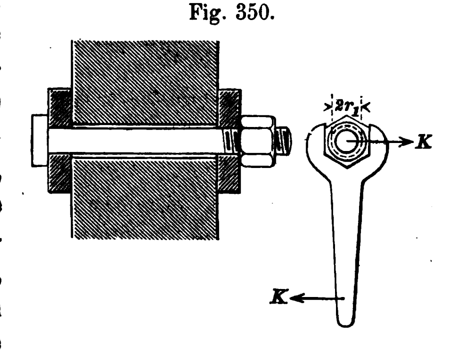


Fig. 350.

Soll durch Drehung der Schraubenmutter mittels des Schraubenschlüssels eine Platte mit einer Kraft Q gegen eine Wand gepreßt werden, so ist außer den Reibungswiderständen im Gewinde noch ein Reibungswiderstand zwischen Schraubenmutter und Platte zu überwinden [vergl. auch S. 286] (Fig. 350). Dieser möge an einem Kreise vom Halbmesser r_1 angreifen, dann ist das ganze erforderliche Kraftmoment

$$Kl = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha} + Q r_1 f_1 .$$

Beispiel 4: Es sei wiederum, wie S. 289, $r = 0{,}015$ m; $h = 0{,}003$ m; $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}032$; $f = 0{,}15$; $\cos \beta = 0{,}987$; $f \sec \beta = 0{,}17$; $l = 0{,}4$ m; $r_1 = 0{,}02$ m; $f_1 = 0{,}15$; $Q = 1000$ kg; dann wird

$Kl = 0{,}003 \cdot 1000 + 0{,}15 \cdot 0{,}02 \; 1000 = 3 + 3 = 6$ mkg, mithin $K = 15$ kg.

Zum Lösen ist erforderlich $-K_1 l = 0{,}002 \cdot 1000 + 0{,}003 \cdot 1000 = 5$ mkg, $-K_1 = 12{,}5$ kg; ohne Reibung wäre $K_0 = 0{,}015 \cdot 1000 \cdot 0{,}032 : 0{,}4 = 1{,}2$ kg, mithin ist $K = 12{,}5 \, K_0$ infolge der bedeutenden Reibung.

Beispiel 5: Schraubenpresse (Fig. 351). An den oberen Griffen wirke das Kräftepaar Kl zur Hervorbringung des Druckes Q der flachgängigen Spindel gegen die Preßplatte. Dann entsteht an dem Zapfen, mittels dessen sich die Spindel auf die Preßplatte setzt, noch ein Reibungsmoment, welches wegen geringer Abrundung der Druckfläche (nach S. 253, Gl. 7) zu $\frac{1}{2} Q f r_1$ angenommen werden möge, wenn r_1 der Zapfenhalbmesser. Daher wird

$$Kl = Q \left\{ r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) + \tfrac{1}{2} f r_1 \right\}.$$

Für $l = 0{,}4$ m; $r = 0{,}04$ m; $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}07$ $f = 0{,}15$; $r_1 = 0{,}03$ m erhält man

$$\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha} = 0{,}22 \quad \text{und}$$

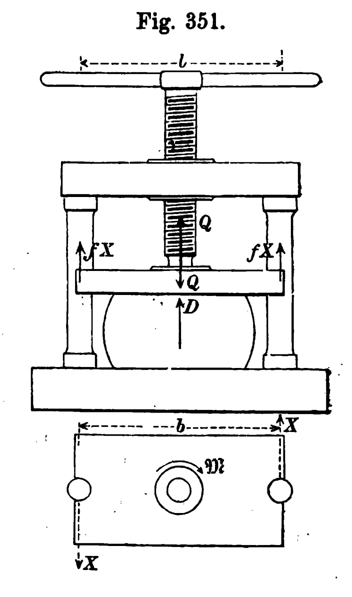
$$K \cdot 0{,}4 = Q \left\{ 0{,}04 \cdot 0{,}22 + \tfrac{1}{2} \, 0{,}15 \cdot 0{,}03 \right\}$$

$$K \cdot 0{,}4 = 0{,}0111 \, Q; \quad K = 0{,}028 \, Q.$$

Ohne Reibung wäre

$$K_0 \cdot 0{,}4 = Qr \operatorname{tg} \alpha; \quad K_0 = 0{,}007 \, Q.$$

Fig. 351.



Der Wirkungsgrad ist darnach $K_0 : K = \frac{1}{4}$. Hierbei ist noch ein kleiner Widerstand unberücksichtigt geblieben. Das Zapfenreibungsmoment $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} f Q r_1$ drückt nämlich die Platte gegen die Führungssäulen mit den Kräften $X = \mathfrak{M} : b$; daraus entsteht an jeder Säule ein Reibungswiderstand fX, der sich dem Abwärtsgleiten der

Prefsplatte entgegensetzt. Mithin ist der Druck D der Platte auf den zu pressenden Körper nicht genau $= Q$, sondern

$$D = Q - 2fX = Q\left(1 - 2f\cdot\frac{fr_1}{2b}\right) = Q\left(1 - \frac{f^2 r_1}{b}\right) = Q\,(1 - 0{,}0017)$$

für $b = 0{,}4$ m. Der Unterschied zwischen D und Q ist hiernach ohne Bedeutung.

Die Kraftverhältnisse der Schraube sind unabhängig von der Anzahl der Gewindgänge, längs deren Spindel und Schraubenmutter sich berühren. In der Anwendung freilich ist die Berührung längs mehrerer Schraubengänge notwendig, weil sonst wegen des vorhandenen Spielraumes die Sicherheit des Eingriffes leidet, u. U. auch der Druck auf die Flächeneinheit zu grofs werden würde.

Schlufsbemerkung über die Reibung. Ist die Reibung bei Maschinen ein erhebliches Bewegungshindernis, dessen Überwindung viel Kosten verursacht, so ist ihr Nutzen doch im gewöhnlichen Leben und in der Technik ein sehr erheblicher. Welche Erleichterung ein grofser Reibungswiderstand beim Gehen bietet, erkennt man beim Schreiten auf glattem Eise; ein grofser Teil der Befestigungen im Bau- und Maschinenwesen (durch Nägel, Keile, Schrauben) beruht auf der Reibung; die Seilreibung wird beim Hinablassen schwerer Lasten und beim Riemenbetriebe verwertet, mittels der Reibung der Triebräder auf den Schienen setzt die Lokomotive den Zug in Bewegung; mit Hülfe der Reibung bringen wir den Zug oder ein Strafsenfuhrwerk wieder zum Stillstande.

Die mechanische Arbeit, welche zur Überwindung von Reibungswiderständen dient, mithin keine sichtbare Geschwindigkeitszunahme der bewegten Körper, d. h. keine Zunahme ihres äufseren Arbeitsvermögens hervorbringt, geht aber keineswegs spurlos verloren; vielmehr setzt sie sich nach den Lehren der Physik in inneres Arbeitsvermögen, in Wärme, um. Gleichwohl ist man berechtigt, von einem Arbeitsverluste durch Reibung zu sprechen, weil die beim Gleiten entstehende Wärme dem Zweck einer Maschine gewöhnlich nicht förderlich ist, vielmehr häufig besondere Mittel zu ihrer Ableitung und Verteilung nötig macht.

II. B. Beschleunigte Bewegung starrer Körper.

1. Gröfse des Arbeitsvermögens eines Körpers bei einer Verschiebung bezw. einer Drehung um eine feste Achse.

Soll ein Körper von der Masse M eine reine Verschiebung erfahren, d. h. sollen seine sämtlichen Punkte in einem Augenblick übereinstimmende Geschwindigkeiten v und Beschleunigungen p haben, so mufs nach S. 164/65 die Mittelkraft R aller äufseren Kräfte K durch den Schwerpunkt gehen. Die Beschleunigung des Schwerpunktes, also auch sämtlicher Punkte des Körpers ist dann

$$1)\qquad p = \frac{R}{M}.$$

Will man den Satz der Arbeit auf starre Körper anwenden, so ist zu bemerken, dafs nach S. 168 die inneren Kräfte eines starren Körpers keine Arbeit verrichten, dafs $\Sigma\frac{m v^2}{2} - \Sigma\frac{m c^2}{2} = \mathfrak{A}_k$, gleich der Arbeit der äufseren Kräfte K ist.

Es kommt nun darauf an, den noch unbestimmten, allgemeinen Ausdruck für das Arbeitsvermögen eines Körpers $\Sigma\frac{m v^2}{2}$ für die einfachen Bewegungsarten in eine bestimmtere Form zu bringen.

Bei einer Verschiebung ist in einem Augenblicke die Geschwindigkeit v allen Massenpunkten gemeinsam, daher

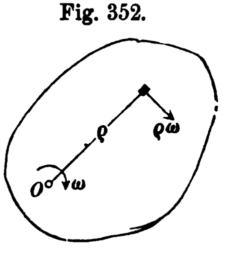
$$\Sigma\frac{m v^2}{2} = \frac{v^2}{2} m_1 + \frac{v^2}{2} m_2 + \ldots + \frac{v^2}{2} m_n = \frac{M v^2}{2},$$

und der Satz der Arbeit lautet:

$$2)\qquad \frac{M v^2}{2} - \frac{M c^2}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Dreht sich der Körper (Fig. 352) aber um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene), so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω allen seinen Punkten gemeinsam, die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande ϱ von der Achse beträgt $v = \varrho\,\omega$. Daher wird $\Sigma\frac{m v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\Sigma m \varrho^2$. Der Ausdruck $\Sigma m \varrho^2$, der nur von der Massenverteilung des Körpers in Bezug auf die Achse abhängt, heifst nach L. Euler (1707—1783) das **Trägheitsmoment** des Körpers in Bezug auf die Achse O und wird mit J (von *inertia*) bezeichnet. Daher

Fig. 352.



3) $$J = \Sigma (m \varrho^2) \quad \text{und}$$

$$\Sigma\frac{m v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} J, \quad \text{sowie}$$

4) $$\frac{\omega^2}{2} J - \frac{\omega_1{}^2}{2} J = \mathfrak{A}_k,$$

wenn ω_1 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist. Die Bezeichnung Trägheitsmoment ist ganz treffend, da diese Gröfse den Einflufs der trägen Masse eines Körpers bei der Drehung um eine Achse angibt.

In gleicher Weise wie S. 145 u. ff. die statischen Momente verschiedener Körper und ebener Flächen ermittelt wurden, soll dies nun auch bezüglich der Trägheitsmomente geschehen.

2. Trägheitsmomente.

Das Trägheitsmoment J wird für solche Körper am einfachsten, deren Massenteilchen sämtlich in gleicher Entfernung r von der Achse sich befinden. Dies findet statt bei einem Ringe von sehr geringer Wandstärke (Fig. 353). Es ist dann

Fig. 353.

$$J = \Sigma m \varrho^2 = r^2 \Sigma m = M r^2.$$

Für die weitere Anwendung ist es häufig vorteilhaft, das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse gleich zu setzen dem Trägheitsmoment eines dünnen Ringes von einem Halbmesser r.

Nennt man die Masse des gedachten Ringes μ, so mufs

$$J = \mu r^2 \tag{1}$$

sein. Ist J berechnet, r angenommen, so ist dann auch μ bestimmt. Man nennt μ die auf den Abstand r bezogene Masse des Körpers. Bei gegebenem ω ist dann das Arbeitsvermögen dieses Ringes von der Masse μ ebenso grofs wie dasjenige des gegebenen Körpers. In Gl. 1 kann von den Gröfsen μ und r eine gewählt werden. Setzt man $\mu = M$, d. h. gleich der wahren Masse des Körpers, und den zugehörigen Abstand $r = i$, so wird

$$J = Mi^2, \tag{2}$$

und man nennt i den **Trägheitsarm** oder **Trägheitshalbmesser** des Körpers für die Achse O. Denkt man sich die wahre Masse M des Körpers in dem Abstand i von der Achse zu einem Ring oder einem Punkte vereinigt, so hat dies Gebilde das gleiche Trägheitsmoment mit dem Körper.

Das statische Moment $Mx_0 = \Sigma m x$ bezieht sich auf eine Achse oder eine Ebene. Verschiebt sich die Ebene um eine Gröfse e, so geht der Schwerpunktsabstand x_0 über in $x_0 \pm e$, mithin ändert sich das statische Moment um $\pm Me$. Das Trägheitsmoment bezieht sich auf eine Achse. Vertauscht man die gegebene Achse aber mit einer Parallelachse im Abstand e, so läfst sich zwischen den Trägheitsmomenten in Bezug auf die beiden Parallelachsen auch eine ähnlich einfache Beziehung aufstellen, wenn die eine Achse durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Fig. 354.

Die Schwerpunktsachse S stehe rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 354), ebenso eine Achse durch O. Die entsprechenden Trägheitsmomente seien J_S bezw. J_0. Dann ist $J_S = \Sigma m r^2$, $J_0 = \Sigma m \varrho^2$. Weil nun $\varrho^2 = (e + x)^2 + y_2$ und $r^2 = x^2 + y^2$, so wird $\varrho^2 = e^2 + 2ex + r^2$, mithin $J_0 = \Sigma m e^2 + \Sigma 2mex + \Sigma m r^2$ oder $J_0 = Me^2 + 2e\Sigma m x + J_S$. Weil aber der Abstand x von einer durch den Schwerpunkt S gehenden Ebene gemessen ist, so wird (nach S. 147) $\Sigma m x = 0$, also

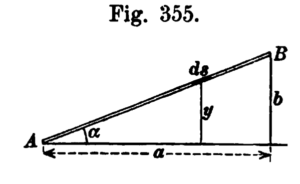
$$J_0 = J_S + Me^2. \tag{3}$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse plus der Masse mal dem Quadrate der Entfernung beider Achsen.

Sämtliche Parallelachsen O, O_1 ... in demselben Abstand e von S liefern gleiches Trägheitsmoment. Von allen Parallelachsen liefert die durch den Schwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment.

Trägheitsmoment der materiellen geraden Linie. Ein gerader Stab von der Länge s und dem Querschnitt F sei an einem Ende A an der als Drehachse dienenden x-Achse befestigt, während das andere Ende B durch eine masselose Stange b mit der Achse verbunden sei (Fig. 355). Ein Massenteilchen m ist dann nach S. 33 $= \frac{\gamma}{g} F \cdot ds$ und liefert zum Trägheitsmoment J den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g} F \cdot ds \cdot y^2$; es ist aber $ds : s = dy : b$,

Fig. 355.



mithin
$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{Fs}{b} \int_0^b y^2 dy = \frac{\gamma}{g} \frac{Fsb^2}{3},$$

oder, weil die Masse des Stabes $M = \frac{\gamma}{g} Fs$:

4) $$J = {}^1\!/_3\, Mb^2.$$

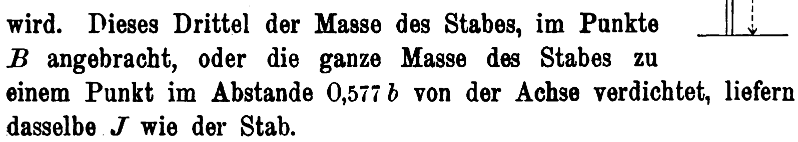
Setzt man dies $= \mu b^2$, so ist die auf dem Endpunkt B oder auf den Abstand b bezogene Masse des Stabes

5) $$\mu = {}^1\!/_3\, M,$$

während der Trägheitshalbmesser

6) $$i = \sqrt{\frac{J}{M}} = \frac{b}{\sqrt{3}} = 0{,}577\, b$$

Fig. 356.



wird. Dieses Drittel der Masse des Stabes, im Punkte B angebracht, oder die ganze Masse des Stabes zu einem Punkt im Abstande $0{,}577\, b$ von der Achse verdichtet, liefern dasselbe J wie der Stab.

Für $\alpha = 90^0$ (Fig. 356) gelten dieselben Werte; nur ist b hier gleich der Länge s des Stabes.

Trägheitsmoment einer materiellen ebenen Fläche (Scheibe). Trägheitsmomente in Bezug auf Achsen OX und OY in der Ebene der Figur (Fig. 357) nennen wir Durchmesser-Trägheitsmomente J_x und J_y. Es ist $J_x = \Sigma m y^2$, $J_y = \Sigma m x^2$, ihre Summe $J_x + J_y = \Sigma m \; (x^2 + y^2) = \Sigma m \varrho^2$; letzterer Wert ist aber das Trägheitsmoment J_0 in Bezug auf die Achse O rechtwinklig zur Fläche und heifst das polare Trägheitsmoment.

Fig. 357.

$$7) \qquad J_0 = J_y + J_x.$$

Es ist in Bezug auf einen Pol O das polare Trägheitsmoment einer ebenen Fläche gleich der Summe der beiden Durchmesser-Trägheitsmomente in Bezug auf zwei rechtwinklig zueinander stehende, durch den Pol O gelegte Durchmesser. Eine gemeinschaftliche Drehung der Durchmesser um O ändert diese Summe nicht, weil J_0 dadurch nicht beeinflufst wird.

Trägheitsmoment einer materiellen Kreisfläche. Um das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt O (Fig. 358) zu erhalten, nehmen wir einen Ring von dem Halbmesser ϱ und der Dicke $d\varrho$ heraus. Dieser liefert, wenn δ die Dicke der Scheibe, den Beitrag

$$d J_0 = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot 2 \varrho \pi \cdot d \varrho \cdot \varrho^2, \text{ daher ist}$$

$$J_0 = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot 2 \pi \int_0^r \varrho^3 d \varrho = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot \pi \frac{r^4}{2},$$

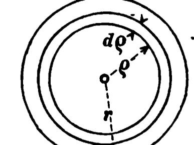


Fig. 358.

$$8) \qquad J_0 = \frac{M r^2}{2},$$

$\mu = {}^1/_2 M$ (bezogen auf r), $i = r \sqrt{{}^1/_2} = 0{,}707\, r$.

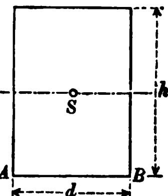
Da sämtliche Durchmesser = Trägheitsmomente des Kreises gleichwertig sind, so wird hier $J_y = J_x$, mithin $J_x + J_y = 2 J_x = J_0$, oder

$$9) \qquad J_x = J_y = \frac{M r^2}{4} = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot \frac{r^4 \pi}{4}.$$

Trägheitsmoment einer mat. Rechteckfläche. Das Trägheitsmoment des Rechtecks von der Breite d, der Höhe h (Fig. 359) in Bezug auf eine Kante $AB = d$ läfst sich unmittelbar aus dem eines Stabes ableiten. Teilt man das Rechteck in lauter gleiche Streifen

von der Höhe h, so ist, nach Gleichung 5, die auf den Abstand h bezogene Masse jedes Streifens $1/3$ der wahren Masse. Das gleiche Verhältnis gilt dann auch für das ganze Rechteck, und es ist in Bezug auf AB:

Fig. 359.



$$J = 1/3\, Mh^2 = 1/3\, \frac{\gamma}{g}\, \delta \cdot d \cdot h^3.$$

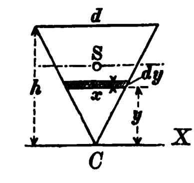
Eine zu AB parallele Achse durch den Schwerpunkt S hat von AB den Abstand $e = 1/2\, h$, mithin ist

$$10)\quad J_s = 1/3\, Mh^2 - 1/4\, Mh^2 = 1/12\, Mh^2 = \frac{1}{12}\frac{\gamma}{g}\, \delta \cdot d \cdot h^3.$$

Für das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse, parallel mit h würde ebenso $1/12\, Md^2$ entstehen, mithin für das polare Trägheitsmoment $J_0 = 1/12\, M(d^2 + h^2) = 1/12\, MD^2$, wenn D die Diagonale bedeutet.

Trägheitsmoment einer mat. Dreieckfläche von der Grundlinie d, der Höhe h (Fig. 360). Zum Trägheitsmomente J_x in Bezug auf eine Achse $CX \parallel d$ liefert ein Streifen $x \cdot dy$ den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g}\, \delta \cdot x \cdot dy \cdot y^2 = \frac{\gamma}{g}\, \frac{\delta \cdot d}{h}\, y^3 dy$ (wegen $x : d = y : h$), daher ist

Fig. 360.



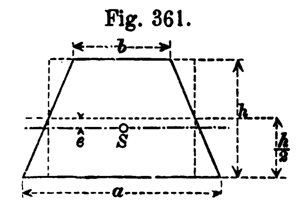
$$J_x = \frac{\gamma}{g}\, \frac{\delta \cdot d}{h} \int_0^h y^3\, dy = \frac{\gamma}{g}\, \delta\, \frac{d \cdot h^3}{4} = \frac{Mh^2}{2};$$

darin bezeichnet δ die Dicke der Platte. In Bezug auf eine Schwerpunktsachse $\parallel d$ ist wegen des Abstandes $e = 2/3\, h$:

$$11)\quad J_S = J_x - M\frac{4}{9}h^2 = Mh^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{Mh^2}{18} = \frac{\gamma}{g}\, \delta\, \frac{d \cdot h^3}{36}.$$

Trägheitsmoment eines mat. Trapezes. In Bezug auf eine Achse in der Mitte der Höhe (Fig. 361) ist das Trägheitsmoment J_1 offenbar ebenso grofs wie dasjenige des gestrichelten flächengleichen Rechtecks, da die von unten nach oben verdrehten Dreiecke in beiden Lagen die gleichen Beiträge liefern; es ist also $J_1 = \frac{M}{12} h^2$.

Fig. 361.



Der Schwerpunkt liegt, wie man au' Gl. 8, S. 150, leicht findet, um $e = \frac{h}{6}\, \frac{a - b}{a + b}$

unterhalb der Mitte, daher ist in Bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse $J_S = \frac{Mh^2}{12} - \frac{Mh^2}{36}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$. Dies läfst sich zusammenziehen zu

$$12)\qquad J_S = \frac{Mh^2}{18}\left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right),$$

in welcher Formel selbstverständlich diejenigen für Rechteck und Dreieck als Sonderfälle enthalten sind.

Trägheitsmoment eines Zylinders überall gleicher Dichte, von der Länge l, bezogen auf seine geometrische Achse. Der Zylinder läfst sich in lauter Scheiben von gleicher Dicke zerlegen, die sämtlich gleich viel zur Masse sowie zum Trägheitsmomente beitragen. Daher mufs gelten wie für die mat. Kreisfläche (Gl. 8)

$$13)\qquad J_0 = M\frac{r^2}{2} = \frac{\gamma}{g}\frac{r^4\pi}{2}l \quad \text{und} \quad \mu = {}^1/_2 M.$$

Für einen Ring von den Halbmessern r und R, der Länge l ist J_0 der Unterschied der Trägheitsmomente der Zylinder der Halbmesser R und r, d. h.

$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)\,l, \quad \text{und weil}$$

$$M = \frac{\gamma}{g}\pi(R^2 - r^2)\,l,$$

$$14)\qquad J_0 = {}^1/_2 M(R^2 + r^2).$$

Trägheitsmoment eines Kegels in Bezug auf seine geometrische Achse (Fig. 362). Zerlegt man einen Umdrehungskörper in Scheiben, rechtwinklig zur Drehachse, vom Halbmesser y und der Dicke dx, so liefert eine solche Scheibe zum Trägheitsmomente den Beitrag (Gl. 8)

Fig. 362.

$$dJ = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}y^4\,dx, \quad \text{so dafs}$$

$$15)\qquad J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}\int y^4\,dx.$$

Diese Formel gilt für alle Umdrehungskörper. Die Beziehung zwischen y und x richtet sich nach der besonderen Art der Meridianlinie.

Beim **Kegel** ist $y : b = x : a$, daher

$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}\frac{b^4}{a^4}\int_0^a x^4\,dx = \frac{\gamma}{g}\pi\frac{a b^4}{10}.$$

mithin, weil $M = \frac{\gamma}{g}\pi\frac{a b^2}{3}$:

16) $$J = \frac{3}{10} M b^2; \quad i = b\sqrt{0{,}3} = 0{,}548\,b,$$

und, auf den Abstand b bezogen:

$$\mu = 0{,}3\,M.$$

Für ein **Umdrehungsparaboloid** wird mit $y^2 = 2px$

17) $$J = {}^1\!/\!_3\,M b^2; \quad i = 0{,}577\,b; \quad \mu = {}^1\!/\!_3\,M.$$

Trägheitsmoment der Halbkugel (Fig. 363). Es ist $y^2 = r^2 - x^2$, daher (Gl. 15) $J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}\int_0^r (r^4 - 2r^2x^2 + x^4)\,dx = \frac{8}{30}\frac{\gamma}{g} r^5\pi$;

oder, weil $M = \frac{2}{3}\frac{\gamma}{g} r^3\pi$:

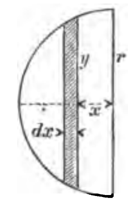
18) $$J = 0{,}4\,M r^2; \quad i = r\sqrt{0{,}4} = 0{,}632\,r$$

und, auf den Abstand r bezogen:

19) $$\mu = 0{,}4\,M.$$

Für die ganze Kugel ist sowohl J wie M doppelt so groß, daher gelten die gleichen Verhältniszahlen.

Fig. 363.



Geometrische Trägheitsmomente. Setzt man in den Ausdrücken der Trägheitsmomente für ebene Flächen die Masse der Flächeneinheit $\frac{\gamma}{g}\delta = 1$ und in denen für Körper die Masse der Körpereinheit $\frac{\gamma}{g} = 1$, so erhält man für die Trägheitsmomente Ausdrücke, die nur von der geometrischen Form der Flächen bezw. Körper abhängen. Für die Massen treten dann die Flächen F bezw. Körperinhalte V an die Stelle. Diese Werte der Trägheitsmomente nennt man **geometrische Trägheitsmomente**. Die Werte sind:

Für die **Kreisfläche** $J_0 = {}^1\!/\!_2\,F r^2 = {}^1\!/\!_2\,r^4\pi$;

20) $$J_x = {}^1\!/\!_4\,F r^2 = {}^1\!/\!_4\,r^4\pi.$$

Für das **Rechteck** in Bezug auf eine Mittelachse

21) $$J = {}^1\!/\!_{12}\,d h^3 = {}^1\!/\!_{12}\,F h^2.$$

Für das **Dreieck** in Bezug auf die Schwerpunktsachse

22) $$J = {}^1/_{36}\, d \cdot h^3 = {}^1/_{18}\, F h^2 .$$

Für das **Trapez** in Bezug auf die Schwerpunktsachse

24) $$J = \frac{1}{18} F h^2 \left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right) = \frac{h^3}{36}\left(a + b + \frac{2ab}{a+b}\right).$$

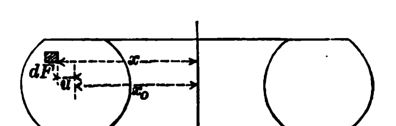
Für den **Zylinder**

24) $$J = {}^1/_2\, V r^2 = {}^1/_2\, r^4 \pi l \quad \text{u. s. w.}$$

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist wegen der Form Fi^2 vom vierten Grade, das eines Körpers wegen der Form Vi^2 vom fünften Grade.

Geometrisches Trägheitsmoment eines ringförmigen Umdrehungskörpers. Ein Teilchen dF der Meridian-Figur (Fig. 364) liefert zum geometrischen Trägheitsmoment J in Bezug auf die geometrische Achse den Beitrag $dJ = dV \cdot x^2 = 2 x \pi \cdot dF \cdot x^2 = 2\pi x^3 dF$, daher ist

Fig. 364.



25) $$J = 2\pi \int x^3 dF .$$

Legt man durch den Schwerpunkt der Meridianfigur eine Achse, parallel der Umdrehungsachse, und hat dF von dieser Achse den Abstand u, so ist

$$x = x_0 + u; \quad x^3 = x_0^3 + 3 x_0^2 u + 3 x_0 u^2 + u^3,$$

mithin, weil x_0 für die Integration unveränderlich:

$$J = 2\pi \left\{ x_0^3 F + 3 x_0^2 \int dF \cdot u + 3 x_0 \int dF \cdot u^2 + \int dF \cdot u^3 \right\}.$$

Nach dem Satze von Guldin (S. 158) ist aber der Rauminhalt des Körpers $V = 2\pi x_0 F$; ferner $\int dF \cdot u = 0$ (nach S. 147); endlich $\int dF \cdot u^2$ das geometrische Trägheitsmoment der Meridianfigur in Bezug auf die zur Umdrehungsachse parallele Achse durch ihren Schwerpunkt; dieses werde $\mathfrak{J}$ genannt, so dafs

26) $$J = V x_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} + 2\pi \int dF \cdot u^3 .$$

Ist die Schwerpunktsachse der Figur eine Symmetrieachse derselben, so wird $\int dF \cdot u^3 = 0$, da $dF \cdot u^3$ in gleich viel positiven und negativen Elementen von derselben Gröfse auftritt, daher

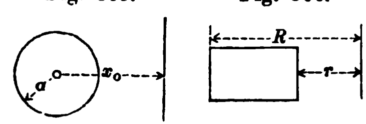
27) $$J = V x_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} = V\left(x_0^2 + 3\frac{\mathfrak{J}}{F}\right).$$

(Für einen sehr dünnen Ring wäre bekanntlich nach Gl. 1 $J = V x_0^2$)

Ist die Meridianfigur ein Kreis vom Halbmesser a (Fig. 365), so wird $\mathfrak{J} = {}^1/_4 F a^2$ (Gl. 20), mithin

$$J = V(x_0^2 + {}^3/_4 a^2).$$

Fig. 365. Fig. 366.



Für ein Rechteck als erzeugende Figur (Fig. 366) ist $\mathfrak{J} = F \cdot {}^1/_{12}(R - r)^2$ (Gl. 21), $x_0 = {}^1/_2 (R + r)$, somit

$$J = V\left\{{}^1/_4 (R + r)^2 + {}^1/_4 (R - r)^2\right\}$$
$$= {}^1/_4 V\left\{R^2 + 2Rr + r^2 + R^2 - 2Rr + r^2\right\}$$
$$= {}^1/_2 V(R^2 + r^2),$$ übereinstimmend mit Gl. 14, S. 300.

Trägheitsmoment eines aus 2 Teilen bestehenden Körpers. Legt man (Fig. 367) durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Teile und durch den Gesamtschwerpunkt S parallele Achsen, sind e_1, e_2 und e die Abstände der Achsen, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente der Teile bezüglich der eigenen Schwerpunktsachsen, so ist für den ganzen Körper und seine Schwerpunktsachse (Gl. 3, S. 296)

Fig. 367.

$$J = J_1 + M_1 e_1^2 + J_2 + M_2 e_2^2.$$

Weil aber $M_2 e_2 = M_1 e_1$ und $e_1 + e_2 = e$,

so wird $$e_1 = e \frac{M_2}{M_1 + M_2}.$$

Man kann daher auch schreiben:

$$J = J_1 + J_2 + M_1 e_1 e_1 + M_2 e_2 e_2$$
$$= J_1 + J_2 + M_1 e_1 (e_1 + e_2)$$
$$= J_1 + J_2 + M_1 \frac{e^2 M_2}{M_1 + M_2}$$

28) $$J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} e^2.$$

3. Winkelbeschleunigung.

Soll ein Körper sich gleichförmig um eine feste Achse drehen, so mufs die Momentensumme der äufseren Kräfte in Bezug auf die Achse Null sein (S. 245). Ist die Momentensumme von Null verschieden, so erfolgt die Drehung nicht gleichförmig, sondern mit einer Winkelbeschleunigung ε. Ebenso wie bei der geradlinigen Bewegung die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt}$ (S. 15), so ist

die sekundliche Zunahme der Winkelgeschwindigkeit die Winkelbeschleunigung

$$1)\qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Die Beziehung zwischen der Winkelbeschleunigung ε und deren Ursachen, den äufseren Kräften, kann man aus dem Satze vom Arbeitsvermögen ableiten, indem man diesen auf ein Zeitteilchen dt anwendet. Die Zunahme an Arbeitsvermögen kann dann nach Gl. 4 (S. 295) geschrieben werden $\frac{1}{2} J d(\omega^2) = J\omega\, d\omega$. Die entsprechende Arbeit aber findet man in folgender Weise: Eine der äufseren Kräfte sei P und liege im allgemeinen windschief zur Achse O. Das gemeinsame Lot zwischen der Kraft P und der Achse sei r; man zerlege die Kraft P im Fufspunkt A von r in eine Seitenkraft Z, parallel mit der Achse O, und eine Seitenkraft K, welche die Achse rechtwinklig kreuzt. Die Kraft Z hat in Bezug auf O das Moment Null und verrichtet auch bei der Drehung keine Arbeit, weil sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des Punktes A steht. Die Seitenkraft K aber hat das Moment Kr (Fig. 368) und verrichtet bei der unendlich kleinen Drehung um den Winkel $\omega \cdot dt$ die Arbeit $K \cdot r\omega \cdot dt$. Für sämtliche Punkte des Körpers ist in einem Augenblicke die Gröfse $\omega \cdot dt$ die gleiche. Verfährt man mit allen äufseren Kräften ebenso wie mit P, so wird die Arbeitssumme $d\mathfrak{A}_k = \omega \cdot dt\, \Sigma Kr$. Darin ist ΣKr die Momentensumme der äufseren Kräfte in Bezug auf die Drehachse, schreiben wir dafür $\mathfrak{M}$, so wird nunmehr $J\omega \cdot d\omega = \omega \cdot dt \cdot \mathfrak{M}$, mithin

Fig. 368.

$$2)\qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{J}.$$

Ebenso wie bei der Verschiebung die Beschleunigung $p = R : M$ = Kraft : träge Masse, so ist bei der Drehung um eine feste Achse die Winkelbeschleunigung = Kraftmoment : Trägheitsmoment.

Wählt man einen bestimmten Drehungshalbmesser oder Hebelarm r, so ist an dessen Endpunkte die Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$, die Umfangsbeschleunigung oder Tangentialbeschleunigung

$$3)\qquad p_t = r \cdot d\omega : dt = r\varepsilon;$$

Bringt man nun das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ auf den Hebelarm r, setzt $\mathfrak{M} = Kr$ und schreibt $J = \mu r^2$, so wird aus Gl. 2 und 3

$$p_t = r\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}r}{J} = \frac{Kr^2}{\mu r^2} \text{ oder}$$

4) $$p_t = \frac{K}{\mu},$$

d. h. wenn man alles auf den gleichen Abstand oder Drehungshalbmesser r bezieht, hat man wie bei einer Verschiebung:

$$\text{Umfangsbeschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Auch Gl. 4 (S. 295) für das Arbeitsvermögen kann man entsprechend umformen. Setzt man am Ende des Armes r die Anfangsgeschwindigkeit $r\omega_1 = c$, die Endgeschwindigkeit $r\omega = v$, $J = \mu r^2$, so wird aus $1/2\,(\omega^2 - \omega_1^2)\,J = \mathfrak{A}_k$:

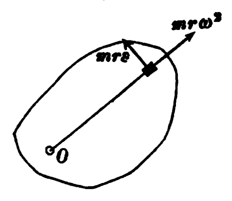
$$1/2\,(v^2 - c^2)\,\mu = \mathfrak{A}_k \text{ oder}$$

5) $$\frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = \mathfrak{A}_k,$$

wie (S. 294) für die Verschiebung eines Körpers.

Man kann Gl. 2, $\mathfrak{M} = \varepsilon J$ auch mittels des Satzes vom d'Alembert (S. 163) ableiten. Ist in einem Augenblick ω die Winkelgeschwindigkeit, ε die Winkelbeschleunigung, so führt ein Punkt des Körpers im Abstand r von der Achse (Fig. 369) eine ungleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ und der Tangentialbeschleunigung $p_t = r\varepsilon$ aus; die Zentripetalbeschleunigung ist $p_n = v^2 : r = r\omega^2$ (Gl. 1, Seite 88). Diesen entsprechen die Ergänzungskräfte $mr\varepsilon$ bezw. $mr\omega^2$. Deren Momentensumme in Bezug auf O ist $-\varepsilon\,\Sigma mr^2 = -\varepsilon J$. Den gleichen, aber entgegengesetzten Wert mufs auch die Momentensumme $\mathfrak{M}$ der äufseren Kräfte haben, d. h.

Fig. 369.



6) $$\mathfrak{M} = \varepsilon J.$$

4. Physisches Pendel.

Ein Körper, der um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende wagerechte Achse drehbar ist und unter alleiniger Wirkung der Schwere steht, bildet, wenn er in der sicheren Gleichgewichtslage nicht die Geschwindigkeit Null hat, ein Pendel, welches, zum Unterschiede von dem aus einem einzelnen Massenpunkt m mit

gewichtlosem Faden bestehenden, S. 76 behandelten, mathematischen Pendel, **physisches** Pendel genannt wird.

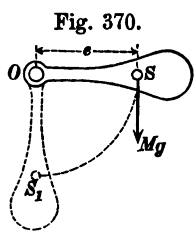


Fig. 370.

Der beliebig gestaltete Körper sei zunächst so festgehalten, dafs der Schwerpunkt S (Fig. 370) in gleicher Höhe mit der Achse O liegt, und werde nun losgelassen. Es soll die Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, mit der der Drehungshalbmesser $OS = e$ des Schwerpunktes durch die Lotrechte hindurchschwingt.

Wendet man auf die Bewegung SS_1 den Satz der Arbeit an, so ergibt sich (nach S. 163 u. 295) $\frac{1}{2}\omega^2 J - O = Mge$, mithin

$$1) \qquad \omega = \sqrt{2ge\frac{M}{J}} = \sqrt{2g\frac{e}{i^2}} \text{ mit } J = Mi^2 \text{ (S. 296).}$$

Ist der Körper ein Stab, eine materielle Gerade, von der Länge a (Fig. 371), so ist $e = \frac{1}{2}a$, $J = \frac{1}{3}Ma^2$ (S. 296), mithin

$$2) \quad \omega = \sqrt{\frac{ga3}{a^2}} = \sqrt{\frac{3g}{a}}$$

und die Umfangsgeschwindigkeit bei C:

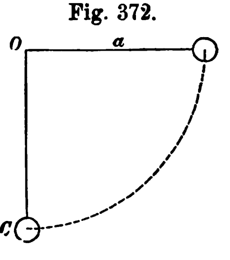


Fig. 371. Fig. 372.

$$3) \qquad v = a\omega = \sqrt{3ga},$$

während für einen Massenpunkt am Ende einer gewichtlosen Stange von der Länge a (Fig. 372)

$$4) \qquad v = \sqrt{2ga} \text{ (Gl. 1, S. 76) sein würde.}$$

Schwingungsdauer des physischen Pendels. In einer beliebigen Zwischenlage (Fig. 373), in der OS mit der Lotrechten den Winkel ϑ bildet, ist das Moment

$$\mathfrak{M} = Mge \sin\vartheta,$$

daher die Winkelbeschleunigung (Gl. 2, S. 304)

$$\varepsilon = \frac{Mge\sin\vartheta}{J_0}.$$

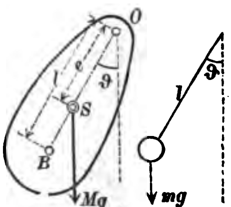


Fig. 373.

Für ein **mathematisches** Pendel aber von einer Pendellänge l ist bei demselben Abweichungswinkel ϑ, weil $J = m l^2$,

$$\varepsilon_1 = \frac{m g l \sin \vartheta}{m l^2} = \frac{g \sin \vartheta}{l}.$$

Beide Beschleunigungen ε und ε_1 sind verhältnisgleich mit $\sin \vartheta$ und stimmen völlig überein, wenn

$$\frac{M g e}{J_0} = \frac{g}{l}, \text{ d. h. wenn}$$

$$l = \frac{J_0}{M e} \quad \text{ist.} \tag{5}$$

Wählt man die Länge des mathematischen Pendels nach Gl. 5 und gibt beiden Pendeln einen gleichen Anfangswert von ϑ, bei dem die Geschwindigkeit Null war, läfst also beide Pendel von derselben Anfangsneigung aus sich in Bewegung setzen, so wird die Beschleunigung beider Pendel für jeden Winkel ϑ die gleiche sein, daher werden beide Pendel sich übereinstimmend bewegen, mithin auch gleiche Schwingungsdauer haben müssen.

Bei kleinen Schwingungen ist nun für das mathematische Pendel die Dauer einer einfachen Schwingung nach S. 78

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Setzt man hierin den Wert l nach Gl. 5 ein, so entsteht

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_0}{M g e}} \tag{6}$$

als Dauer einer einfachen kleinen Schwingung des physischen Pendels.

Man nennt die Länge l die **Schwingungslänge** des physischen Pendels. Trägt man diese Länge von O aus auf der Geraden OS ab, so erhält man mit $OB = l$ einen Punkt B, den man den **Schwingungspunkt** des physischen Pendels nennt (Fig. 373). Die Achse durch B, rechtwinklig zur Bildebene, heifst **Schwingungsachse**. Der Punkt B und jeder Punkt der Achse B in dem physischen Pendel schwingt gerade so, als wäre er ein einzelner, mittels eines gewichtlosen Fadens mit O verbundener Massenpunkt.

Denkt man sich durch S eine zu der Drehachse O parallele Achse gelegt und nennt das entsprechende Trägheitsmoment des Körper J_s, so ist $J_0 = J_s = Me^2$, mithin (Gl. 5)

$$7) \qquad l = \frac{J_s}{Me} + e.$$

Zeichnet man um S als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser $SO = e$ (Fig. 374) und denkt sich den Körper an einer beliebigen, zur ursprünglichen Achse O parallelen, durch irgend einen Punkt des Kreises gelegten Achse O_1 aufgehängt, so ergibt sich für diese neue Aufhängung die Schwingungslänge nach Gl. 7 von derselben Gröfse wie bei der Aufhängung in O. Alle Seiten eines geraden Zylinders, der den genannten Kreis zum Grundkreise hat, sind hiernach Achsen gleicher Schwingungslänge und Schwingungsdauer für den Körper.

Fig. 374.

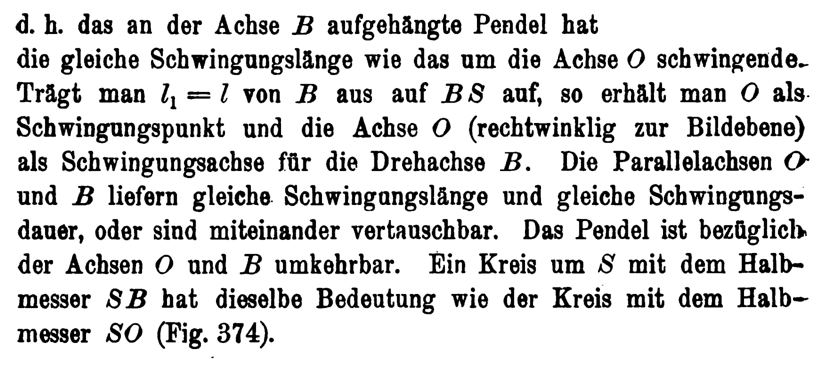
Hängt man den Körper aber an der Schwingungsachse B auf (Fig. 375), so hat man ein physisches Pendel von der Schwingungslänge l_1, wofür sich nach Gl. 7 ergibt, indem man e mit $l - e$ vertauscht:

Fig. 375.

$$l_1 = \frac{J_s}{M(l-e)} + (l - e).$$

Weil aber (nach Gl. 7) $J_s = Me(l-e)$, so erhält man

$$8) \qquad l_1 = \frac{Me(l-e)}{M(l-e)} + l - e = l,$$



d. h. das an der Achse B aufgehängte Pendel hat die gleiche Schwingungslänge wie das um die Achse O schwingende. Trägt man $l_1 = l$ von B aus auf BS auf, so erhält man O als Schwingungspunkt und die Achse O (rechtwinklig zur Bildebene) als Schwingungsachse für die Drehachse B. Die Parallelachsen O und B liefern gleiche Schwingungslänge und gleiche Schwingungsdauer, oder sind miteinander vertauschbar. Das Pendel ist bezüglich der Achsen O und B umkehrbar. Ein Kreis um S mit dem Halbmesser SB hat dieselbe Bedeutung wie der Kreis mit dem Halbmesser SO (Fig. 374).

Sämtliche Achsen, rechtwinklig zur Bildebene, welche durch irgend einen Punkt einer der beiden Kreislinien gelegt werden, sind für den Körper Drehachsen mit übereinstimmender Schwingungslänge l.

Nach Gl. 7 ist die Schwingungslänge l von e abhängig. Faſst man nämlich bei der Vergleichung nur Achsen ins Auge, die zur Bildebene rechtwinklig, d. h. mit der ursprünglichen Drehachse O parallel sind, so ist $J_S : M$ ein konstanter Wert $= i^2$ (wo i der der Achse S entsprechende Trägheitshalbmesser ist). Wird nun e gröſser und gröſser, verschiebt sich also die Drehachse immer weiter vom Schwerpunkte, so nähert sich der erste Summand der rechten Seite von Gl. 7 mehr und mehr der Null, während der zweite fortwährend zunimmt; daher wird für $e = \infty$ auch $l = \infty$ und $t = \infty$. Geht aber umgekehrt e gegen Null, so wird ebenfalls $l = \infty$ und $t = \infty$, d. h. wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht, so ergibt sich, wie auch schon von S. 172 bekannt, kein Drehmoment, so daſs auch keine Schwingung zu Stande kommen kann.

Es muſs daher einen Wert von e geben, für den l ein Minimum wird.

Schreibt man zur bequemeren Übersicht $l = y$, $e = x$, und untersucht

$$y = \frac{i^2}{x} + x \tag{9}$$

auf Minimum, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{i^2}{x^2} + 1 = 0$ zu setzen. Dies verlangt $x = \pm i$. Eine besondere Untersuchung, ob hierbei ein Maximum oder Minimum vorliege, ist nicht erforderlich; denn den für $x = 0$ und $x = \infty$ eintretenden Gröſstwert $y = \infty$ kennen wir bereits.

$$x = \pm i \tag{10}$$

oder in der früheren Schreibweise $e = \pm i$, worin es wegen der Bedeutung der beiden Kreise in Fig. 375 nur auf den absoluten Wert $e = i$ ankommt, ergibt die Schwingungslänge

$$l = \frac{i^2}{e} + i = 2i, \quad \text{also} \quad l - e = 2i - i = i.$$

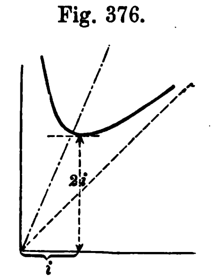
Für eine Drehachse O, welche von S um $i = \sqrt{\frac{J_S}{M}}$ entfernt ist, wird also die Schwingungslänge

$$l_{min} = 2i = 2e, \tag{11}$$

womit die beiden Kreise in Fig. 375 zusammenfallen.

Die Darstellung der Gl. 9 ist eine Hyperbel, deren eine Asymptote die Ordinatenachse, während die andere, durch den Anfangspunkt gehend, den rechten Winkel der Koordinatenachsen halbiert. $x = i$ und $y_{min} = 2i$ sind in Fig. 376 angegeben.

Fig. 376.



Bekanntlich werden Pendelversuche benutzt zur Ermittelung der scheinbaren Fallbeschleunigung g an verschiedenen Stellen der Erde; aus $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wird $g = l\pi^2 : t^2$. Hieraus kann man g berechnen, wenn man für ein Pendel die Schwingungslänge l und die Dauer t einer einfachen Schwingung kennt. Letztere läfst sich durch Zählung der Anzahl der Schwingungen während einer längeren Zeit feststellen. Die Schwingungslänge könnte man wohl nach Gl. 5, S. 307, berechnen, jedoch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit für feine Messungen, wie sie zur Ermittelung von g nötig sind. Denn kein Körper läfst sich so gleichmäfsig herstellen, dafs man J_0 und das statische Moment Me mit grofser Schärfe durch Messung und Rechnung zu bestimmen vermöchte. Wohl aber dient zur scharfen Bestimmung der Schwingungslänge l die Eigenschaft des Pendels, dafs Drehachse und Schwingungsachse miteinander vertauschbar sind. Man stellt also ein Pendel her mit fester Schneide (Drehachse) O, berechnet annähernd l, bringt in diesem Abstand $l = OB$ eine Gegenschneide B an und verstellt an dem Körper verschiebbare Gewichte so lange, bis das Pendel, ob in O oder in B aufgehängt, gleiche Schwingungsdauer zeigt. Dann ist, wenn B und O nicht in derselben Entfernung vom Schwerpunkte liegen, wenn also B nicht den Punkt O_1 in Fig. 375 bedeutet, $OB = l$ die Schwingungslänge, die zwischen den Schneiden mit grofser Schärfe gemessen werden kann. Ein solches Pendel heifst ein Umkehrungspendel (Reversionspendel).

Ist der Körper ein dünner prismatischer Stab von der Länge a (Fig. 377) und an seinem oberen Ende aufgehängt, so ist $J_0 = {}^1/_3\, Ma^2$, $e = {}^1/_2\, a$, mithin die Schwingungslänge (Gl. 5)

$$12)\qquad l = \frac{2}{3}\frac{Ma^2}{Ma} = \frac{2}{3}a.$$

Fig. 377.

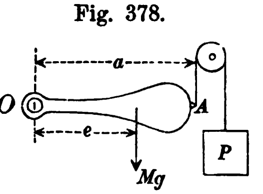
Die Achsen O, O_1, B und B_1 liefern gleiche Schwingungslänge.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer eines als physisches Pendel eingerichteten Körpers kann auch benutzt werden, um dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse zu bestimmen. Gl. 6 liefert nämlich

$$13)\qquad J_0 = Mget^2 : \pi^2.$$

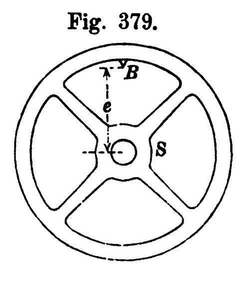
Hat man (Fig. 378) den Punkt A bestimmt, der in der sicheren Gleichgewichtslage lotrecht unter O liegt, so kann man mittels der Aufhängung des Körpers nach Fig. 378 durch das den Körper im Gleichgewichte haltende Gewicht P das statische Moment $Mge = Pa$ finden. Beobachtet man sodann noch t für kleine Schwingungen, so bestimmt sich J_0 nach Gl. 13.

Fig. 378.



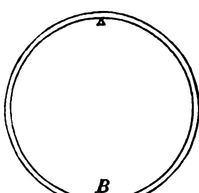
Soll das Trägheitsmoment J_S eines Körpers in Bezug auf eine **Schwerpunktsachse** bestimmt werden, um welche keine Schwingung entsteht, so läßt man den Körper um eine zeitweilige Achse B schwingen (Fig. 379), bestimmt $J_B = J_0$ nach Gl. 13 und findet daraus $J_S = J_B - Me^2$. Oder, wenn die Befestigung einer besonderen Achse oder Schneide nicht ausführbar ist, so verbindet man mit dem Körper eine Ergänzungsmasse M_1 derartig, daß sich beide Massen nicht gegeneinander verrücken können. M_1 muß so gewählt sein, daß man dessen Beitrag zu J und Mge leicht bestimmen kann. Bringt man M_1 so an, daß es nunmehr mit dem gegebenen

Fig. 379.



Körper ein mögliches Pendel bildet, so kann man leicht das Gesamt-Trägheitsmoment und daraus das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers berechnen.

Fig. 380.



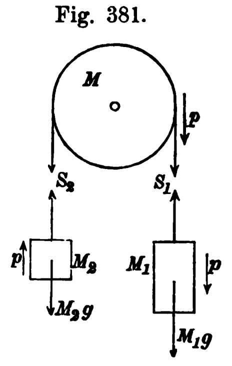
Ein dünner Ring vom Halbmesser r, nach Fig. 380 um eine Schneide schwingend, hat, wegen $J_S = Mr^2$, nach Gleichung 7 die Schwingungslänge

$$l = 2r.$$

5. Beschleunigte Bewegung einer Seilrolle.

Um eine Seilrolle von der Masse M (Fig. 381) sei ein völlig biegsamer Faden geschlungen, an dessen Enden ungleiche Massen M_1 und M_2 hängen. Es soll die Umfangsbeschleunigung p der Rolle berechnet werden ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilbiegungswiderstand und unter der Annahme, dafs ein Gleiten des Fadens auf der Rolle nicht stattfindet. Die Masse M_1 erfährt die Beschleunigung p abwärts, die Masse M_2 dieselbe Beschleunigung aufwärts. Die Spannkräfte der Seilstücke sind nicht etwa M_1g und M_2g, denn diese Gleichheit findet nach S. 86 nur statt, wenn die Massen keine Beschleunigung erfahren. An der Masse M_1 mufs die Mittelkraft $M_1g - S_1 = M_1p$, mithin

Fig. 381.



$$1) \qquad S_1 = M_1g - M_1p, \text{ d. h. } < M_1g$$

sein, weil M_1g und S_1 zusammen die Beschleunigung p erzeugen. Ebenso mufs an der Masse M_2 die aufwärts gerichtete Beschleunigung p durch die aufwärts gerichtete Kraftsumme $S_2 - M_2g$ hervorgebracht werden; $S_2 - M_2g = M_2p$, mithin

$$2) \qquad S_2 = M_2g + M_2p, \text{ d. h. } > M_2g.$$

Kann der Faden als gewichtlos betrachtet werden, so wird die gesamte Seilreibung, welche die Rolle zu beschleunigter Drehbewegung veranlafst, gemessen durch den Unterschied der Spannkräfte S_1 und S_2, daher wird nach Gl. 4, S. 305, $\mu p = S_1 - S_2$, wenn μ die auf den Umfang bezogene Masse der Rolle ist.

Also $\mu p = M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p$,

$p(M + M_2 + \mu) = M_1 g - M_2 g$, oder

3) $$p = \frac{M_1 g - M_2 g}{M_1 + M_2 + \mu} = g\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

In dieser Gleichung erscheint also der Gewichtsunterschied $M_1 g - M_2 g$ als treibende Kraft, als träge Masse aber die Summe aller Massen, die an der Beschleunigung p teilnehmen, d. h. M_1, M_2 und die auf den Umfang bezogene Masse μ.

Eine Vorrichtung nach Fig. 381 ist die **Atwood'sche Fallmaschine**, sie dient, da p mit g verhältnisgleich ist, zur Vorführung der Gesetze der Fallbewegung in verkleinertem Mafsstabe, weil die wirkliche Fallbewegung unbequem schnell erfolgt.

Beispiel: Ist $Mg = 1^{kg}$ und (nach S. 300, Gl. 13) das auf den Umfang bezogene Gewicht der Rolle $\mu g = \frac{1}{2}^{kg}$, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3{,}9^{kg}$, so wird, wenn man in Zähler und Nenner statt der Massen die $g$mal gröfseren Gewichte einführt,

$$p = g\frac{4 - 3{,}9}{4 + 3{,}9 + 0{,}5} = g \cdot \frac{0{,}1}{8{,}4} = \frac{g}{84},$$

die Bewegung der angehängten Massen erfolgt daher nur mit $\frac{1}{84}$ der wahren Fallbeschleunigung.

Will man auch die Zapfenreibung mit der Reibungsziffer f und dem Zapfendurchmesser d berücksichtigen, so wird

der Zapfendruck $D = S_1 + S_2 + Mg$; es ist, wie vorher,

$$S_1 = M_1 g - M_1 p$$
$$S_2 = M_2 g + M_2 p \quad \text{und daher}$$
$$D = (M + M_1 + M_2)g - (M_1 - M_2)p$$

mit dem Zapfenreibungs-Momente $\frac{1}{2} Dfd$. Sonach wird, wenn r der Rollenhalbmesser

$$\mu p = S_1 - S_2 - Df\frac{d}{2r}$$

$$= M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p - (M + M_1 + M_2) gf\frac{d}{2r} + (M_1 - M_2) pf\frac{d}{2r}$$

und daraus

4) $$p = g\frac{M_1 - M_2 - (M + M_1 + M_2) f\frac{d}{2r}}{M_1 + M_2 + \mu - (M_1 - M_2) f\frac{d}{2r}}.$$

Mit $d : r = 1 : 25$, $f = 0{,}08$, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3{,}9$, $Mg = 1$, $\mu g = 0{,}5^{kg}$ wird

$$p = g\frac{0{,}1 - 0{,}014}{8{,}4 - 0{,}00016} \text{ oder rund } \frac{g}{100}.$$

Hiernach wird $S_1 = 4(1 - 0{,}01) = 3{,}96^{kg}$, $S_2 = 3{,}9(1 + 0{,}01) = 3{,}94^{kg}$. Damit kein Gleiten des Fadens entstehe, mufs nach S. 259 $\frac{S_1}{S_2} \leqq e^{f_1 \alpha}$ sein, worin f_1 die Reibungsziffer des Fadens, $\alpha = \pi$. Dieser Bedingung wird schon für $f_1 \geqq 0{,}0017$ genügt. Der Seilbiegungswiderstand ist hierbei vernachlässigt, da der Faden als sehr dünn angenommen.

Beispiel 2: Gleiche Massen M_1 mögen an zwei miteinander verbundenen Rollen von ungleichen Halbmessern R und r hängen (Fig. 382); es soll die Umfangsbeschleunigung p der gröfseren Rolle berechnet werden; die der kleinen ist dann $pr:R$. — Die Fadenkräfte sind $S_1 = M_1 g - M_1 p$; $S_2 = M_1 g + M_1 pr:R$; die Winkelbeschleunigung der Rolle ohne Rücksicht auf Reibung (nach S. 304)

Figur 382.

$$\varepsilon = \frac{S_1 R - S_2 r}{\mu R^2} = \frac{M_1 gR - M_1 pR - M_1 gr - M_1 p \frac{r^2}{R}}{\mu R^2},$$

mithin, weil $R\varepsilon = p$,

$$\mu p = M_1 g - M_1 p - M_1 g \frac{r}{R} - M_1 p \frac{r^2}{R^2},$$

$$5) \qquad p = g \frac{M_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{M_1 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \mu}.$$

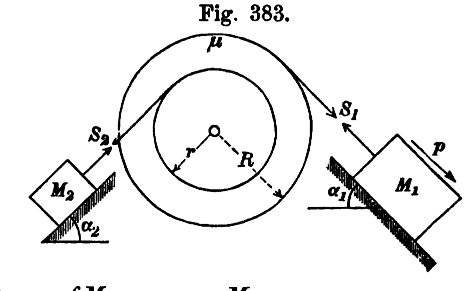
Für $R = 2r$ wird dann $p = g \frac{{}^1/_2 M_1}{{}^5/_4 M_1 + \mu}$, wobei zu beachten, dafs μ auf den Abstand R bezogen ist.

Beispiel 3: Hängen die Massen M_1 und M_2 nicht frei herab, sondern gleiten sie mit Reibung auf schiefen Ebenen mit den Neigungswinkeln α_1 u. α_2 (Fig. 383), während an dem Rollenkörper keine Bewegungswiderstände auftreten, so entsteht an der Masse M_1 eine treibende Kraft

$$M_1 g \sin \alpha_1$$

und eine hindernde Reibung, daher ist

Fig. 383.



$$S_1 = M_1 g \sin \alpha_1 - f M_1 g \cos \alpha_1 - M_1 p;$$

ebenso ist
$$S_2 = M_2 g \sin \alpha_2 + f M_2 g \cos \alpha_2 + M_2 p \frac{r}{R},$$

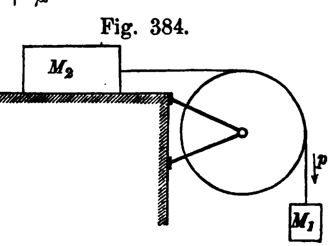
wie in Beispiel 2 wird nun $\mu R p = S_1 R - S_2 r$ und demnach

$$6) \qquad p = g \frac{M_1 (\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1) - M_2 (\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2) \frac{r}{R}}{M_1 + M_2 \frac{r_2}{R_2} + \mu}.$$

Für $r = R$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ entsteht Gl. 3; für $M_2 = M_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ entsteht Gl. 5.

Für $\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 0$, $r = R$ (Fig. 384) ergibt sich

Fig. 384.

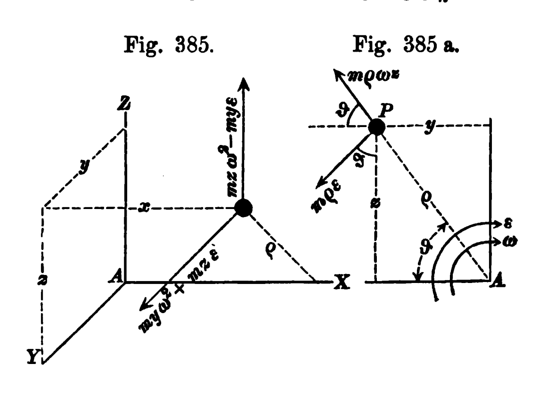


$$7) \qquad p = g \frac{M_1 - f M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

6. Widerstände der festen Drehachse eines Körpers bei beschleunigter Drehbewegung.

An der Achse des Körpers mögen an 2 Lagerstellen A und B die Widerstände A und B auftreten, welche die Aufgabe erfüllen, die Achse unbeweglich zu halten. Es mögen an dem Körper bewegende Kräfte $[K]$ wirken. Sind ω und ε die augenblickliche Winkel-Geschwindigkeit und Beschleunigung, so hat ein Massenpunkt eine daraus zu ermittelnde Beschleunigung p, welcher eine Ergänzungskraft $-mp$ entspricht. Es muſs nun nach dem Satze von d'Alembert die Gruppe dieser Kräfte $[-mp]$ im Gleichgewichte sein mit den Widerständen A und B und der Gruppe der sonstigen äuſseren Kräfte $[K]$. Hiernach können A und B gefunden werden, wenn man die Kräftegruppe $[-mp]$ kennt.

Zusammensetzung der Ergänzungskräfte $-mp$ bei ungleichmäſsiger Drehbewegung. Ein Massenpunkt im Abstande ϱ von der Achse (Fig. 385) führt eine Kreisbewegung aus. Seine Tangentialbeschleunigung ist $p_t = \varrho\varepsilon$, seine Zentripetalbeschleunigung $p_n = \varrho\omega^2$ (Seite 88). Die entsprechenden Ergänzungskräfte sind (Fig. 385a) die Kraft $m\varrho\varepsilon$ (links herum) und die Zentrifugalkraft $m\varrho\omega^2$. Die Drehachse wählen wir zur x-Achse; A sei der Anfangspunkt des Achsenkreuzes (Fig. 385). In der rechtsseitigen Figur (385a) ist der Körper in der Richtung der Drehachse, also auf die yz-Ebene projiziert, weil die Beschleunigungen p_t und p_n und ebenso die entsprechenden Kräfte in dieser Projektion am deutlichsten erscheinen.



Bildet der Halbmesser $\varrho = AP$ mit der AY den Winkel ϑ, so ist

$$\varrho \cos\vartheta = y; \quad \varrho \sin\vartheta = z.$$

Die Kraft $m\varrho\omega^2$ liefert in der positiven y-Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \cos\vartheta = my\omega^2$, in der positiven z-Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \sin\vartheta = mz\omega^2$. Ebenso gibt die Kraft $m\varrho\varepsilon$ die

entsprechenden Seitenkräfte $m\varrho\varepsilon\sin\vartheta = mz\varepsilon$ bezw. $-m\varrho\varepsilon\cos\vartheta = -my\varepsilon$.

Diese Seitenkräfte sind in Fig. 385 eingetragen. Denkt man sich solche Kräfte für jeden einzelnen Massenpunkt angebracht und setzt diese Kräftegruppe nach S. 136 zusammen, so erhält man drei durch den Punkt A gehende Seitenkräfte X, Y, Z und drei Kräftepaar-Achsen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$. In der x-Richtung ergeben sich keine Seitenkräfte. In der positiven y-Richtung entsteht $Y = \Sigma m y \omega^2 + \Sigma m z \varepsilon$, oder, weil ω und ε für alle Punkte dieselben Werte haben und aufserdem $\Sigma m y = M y_0$, $\Sigma m z = M z_0$ (mit y_0 und z_0 als Koordinaten des Schwerpunktes),

$$Y = M y_0 \omega^2 + M z_0 \varepsilon.$$

In gleicher Weise wird $Z = M z_0 \omega^2 - M y_0 \varepsilon$. Zur Ermittelung der Kräftepaar-Achse $\mathfrak{M}_x$ gehen wir am einfachsten auf die ursprünglichen Kräfte $m\varrho\omega^2$ und $m\varrho\varepsilon$ zurück, da $m\varrho\omega^2$ in Bezug auf AX kein Moment hat, $m\varrho\varepsilon$ aber das Moment $-m\varrho\varepsilon\varrho$, so dafs $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon \Sigma m \varrho^2 = -\varepsilon J_x$, was nach Gl. 2, S. 304 selbstverständlich war. Die in der z-Richtung wirkenden Kräfte gehen an der AY in einem Abstand x vorbei, liefern daher mit Rücksicht auf den Drehungssinn $\mathfrak{M}_y = -\omega^2 \Sigma m x z + \varepsilon \Sigma m x y$; ebenso ist $\mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma m x y + \varepsilon \Sigma m x z$. Das Gesamtergebnis der Ergänzungskräfte $[-mp]$ ist also

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= M y_0 \omega^2 + M z_0 \varepsilon \\ Z &= M z_0 \omega^2 - M y_0 \varepsilon \\ \mathfrak{M}_x &= -\varepsilon J_x \\ \mathfrak{M}_y &= -\omega^2 \Sigma m x z + \varepsilon \Sigma m x y \\ \mathfrak{M}_z &= \omega^2 \Sigma m x y + \varepsilon \Sigma m x z. \end{aligned}\right.$$

Hiermit müssen die sämtlichen äufseren Kräfte $[K]$ und die Widerstände A und B im Gleichgewichte sein. In den vorstehenden Gleichungen erscheinen Summenausdrücke $\Sigma m x y$ und $\Sigma m x z$; um sie zu erhalten, mufs man jedes Massenteilchen m mit zweien seiner Koordinaten xy bezw. xz multiplizieren und die Glieder dann summieren. Diese Ausdrücke sind von demselben Grade, derselben Dimension, wie die Trägheitsmomente $J = \Sigma m \varrho^2$ und heifsen **Zentrifugalmomente** $= C$. Wir wollen $\Sigma m x y$ und $\Sigma m x z$ von einander unterscheiden, indem wir neben C als Zeiger diejenige Ordinate setzen, welche in den Summen n i c h t vorkommt, mithin

$$2)\quad \Sigma m x y = C_z;\ \Sigma m x z = C_y.$$

Im allgemeinen sind die Ergänzungskräfte von ω und ε abhängig, so dafs auch die Widerstände der festen Achse sich mit ω und ε ändern. Geht aber die Drehachse durch den Schwerpunkt, so dafs $y_0 = z_0 = 0$, und sind aufserdem die Zentrifugalmomente C_y und C_z gleich Null, so werden aufser $X = 0$ auch $Y = Z = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0$, und es bilden die Kräfte $[-mp]$ nur ein $\mathfrak{M}_x$. Aus den Gl. 1 verschwinden dann. abgesehen von $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$, sämtliche von ω und ε abhängigen Glieder, so dafs die Widerstände A und B der festen Achse sich ebenso berechnen lassen wie für den ruhenden Körper. Bilden unter dieser Voraussetzung die bewegenden Kräfte $[K]$ ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$, dessen Achsenstrecke (S. 133) die Richtung AX hat, so ist dies mit dem berechneten $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$ im Gleichgewichte. Weil die Normalwiderstände A und B der Achse zu dem treibenden Momente nichts beitragen, die Kräfte $[-mp]$ sich aber in jeder anderen Beziehung aufheben, so müssen in diesem Falle die Widerstände A und B der festen Achse verschwinden. Die Achse bedarf dann gar keiner Befestigung, der Körper führt seine Drehung um die unbefestigte Achse so aus, als wäre sie fest. Eine solche Achse nennt man deshalb eine **freie Achse**. Da die sämtlichen äufseren Kräfte $[K]$, A und B mit $[-mp]$ im Gleichgewichte sind, so kann man den Satz aussprechen:

Dreht sich ein Körper um eine **freie** Achse, so setzen sich sämtliche äufseren Kräfte an demselben lediglich zu einem Kräftepaare zusammen, dessen Achsenstrecke mit der Drehachse zusammenfällt, heben sich aber in jeder anderen Beziehung auf; die Normalwiderstände der Drehachse sind von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig.

Ist die Drehung eine gleichförmige ($\varepsilon = 0$), so bestehen die Kräfte $[-mp]$ nur in den Zentrifugalkräften, deren Zusammensetzung liefert (Gl. 1)

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= My_0\,\omega^2 \\ Z &= Mz_0\,\omega^2 \\ \mathfrak{M}_x &= 0 \\ \mathfrak{M}_y &= -\omega^2 C_y \\ \mathfrak{M}_z &= \omega^2 C_z. \end{aligned}\right.$$

Hiermit müssen wieder die äufseren Kräfte im Gleichgewichte sein. Weil nun zur Zusammensetzung der Zentrifugalkräfte die Summen C nötig sind, so erhielten diese den Namen „Zentrifugalmomente“.

Ist einem Körper eine Drehbewegung um eine feste Achse erteilt und setzt er diese ohne weitere Einwirkung von Kräften K fort, so müssen die Widerstände A und B mit den Kräften der Gl. 3 im Gleichgewichte sein. Diese Widerstände sind durch die Winkelgeschwindigkeit bedingt und verschwinden mit dieser. Ist aber die Drehachse eine freie Achse, so heben sich die Zentrifugalkräfte vollständig auf, und es werden auch keine Achswiderstände nötig; die Drehung setzt sich um die unbefestigte Achse fort, als wäre dieselbe festgehalten. Man kann daher sagen, eine freie Achse für einen Körper ist eine solche, in Bezug auf welche die Zentrifugalkräfte sich aufheben.

Einige Bedingungen für eine freie Achse. Die Zentrifugalmomente C_y und C_z werden gleich Null, wenn der Körper rechtwinklig zur Drehachse AX eine Symmetrie-Ebene hat; wählt man diese nämlich zur yz-Ebene (Fig. 386), so entspricht jedem Massenteilchen mit positivem x ein gleiches mit negativem x, so dafs in Σmxy und Σmxz stets je zwei gleiche, sich aufhebende Glieder $+mxy$ und $-mxy$ bezw. $+mxz$ und $-mxz$ vorkommen. Geht aufserdem noch die Drehachse durch den Schwerpunkt, so ist AX eine freie Achse. Hiernach ist für einen gleichartigen Körper von der Form eines geraden Prismas oder Zylinders die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der Endflächen (Fig. 387) eine freie Achse.

Fig. 386.

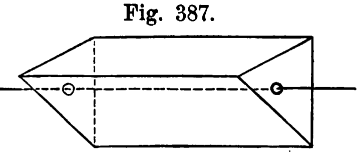


Fig. 387.

Ferner ist AX eine freie Achse, wenn man durch sie zwei rechtwinklig zueinander stehende Symmetrie-Ebenen legen kann. Wählt man diese nämlich zur xy-Ebene und zur xz-Ebene, so liegen je zwei Massenteilchen mit $+y$ und mit $-y$ einander gegenüber, deren eines den Beitrag $+mxy$, deren anderes den Beitrag $-mxy$ liefert, so dafs $C_z = 0$ wird; ebenso $C_y = 0$.

Eingehendere Rechnungen zeigen, dafs jeder noch so unregelmäfsige Körper mindestens drei zueinander rechtwinklige freie Achsen hat.

Andere Arten der Zusammensetzung der Ergänzungskräfte. Trennt man in Gl. 1 die durch den Anfangspunkt A gehenden Kräfte Y und Z in diejenigen Teile $Y_1 = My_0\omega^2$ und $Y_2 = Mz_0\varepsilon$ bezw. $Z_1 = Mz_0\omega^2$ und $Z_2 = -My_0\varepsilon$, welche allein von ω, bezw. von ε abhängen (Fig. 388), so lassen sich nunmehr Y_1 und Z_1 wieder zusammensetzen zu einer Mittelkraft

Fig. 388.

$$R_1 = M\omega^2\sqrt{y_0^2 + z_0^2} = M\omega^2 e,$$

wenn e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet. Diese Kraft ist parallel mit der Richtung jenes rechtwinkligen Abstandes e. Y_2 und Z_2 geben in gleicher Weise eine Mittelkraft $R_2 = M\varepsilon e$, die zu R_1 rechtwinklig und, dem Sinne nach, der Umfangsbeschleunigung des Schwerpunktes entgegengesetzt ist.

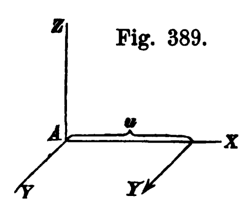


Fig. 389.

Vereinigt man die Kraft Y der Gl. 1 mit der Kräftepaarachse $\mathfrak{M}_z$, so ergibt sich aus beiden eine Kraft von derselben Gröfse $Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon$, welche von A aus um

$$5)\qquad u = \frac{\mathfrak{M}_z}{Y} = \frac{\omega^2 C_z + \varepsilon C_y}{My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x-Richtung parallel verschoben ist (Fig. 389).

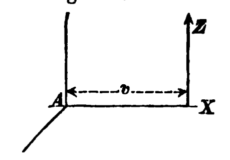


Fig. 390.

Vereinigt man ebenso Z mit $\mathfrak{M}_y$, so erhält man eine gleiche Kraft

$$6)\qquad Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon, \text{ welche um}$$

$$7)\qquad v = \frac{-\mathfrak{M}_y}{Z} = \frac{\omega^2 C_y - \varepsilon C_z}{Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x-Richtung parallel verschoben ist (Fig. 390). Auf diese beiden im Raume sich rechtwinklig kreuzenden Kräfte ist mithin die Gruppe $[-mp]$ auch zurückzuführen.

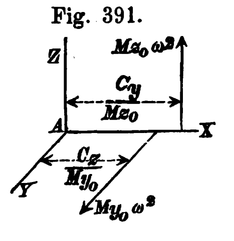
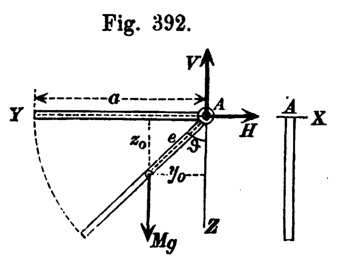


Fig. 391.

Im Falle der gleichförmigen Drehung ($\varepsilon = 0$) vereinfachen sich diese Ergebnisse in der Weise der Fig. 391.

Beispiel 1: Eine als materielle Gerade aufzufassende Stange von der Länge a schwinge unter Einwirkung der Schwere um eine durch den Endpunkt A gelegte wagerechte Achse (Fig. 392). Die Bewegung möge von der wagerechten Lage ausgegangen sein. Hier liegt ein Fall vor, wo C_y und C_z Null sind, weil AYZ eine Symmetrie-Ebene für die Stange ist. Die Drehachse ist aber keine freie Achse, weil sie nicht durch den Schwerpunkt geht. In einer beliebigen Zwischenlage ist $y_0 = e \sin \vartheta$; $z_0 = e \cos \vartheta$, wobei $e = {}^1/_2\, a$; ferner ist $J_x = {}^1/_3\, M a^2$; und für die Winkelgeschwindigkeit ω und Beschleunigung ε in der beliebigen Zwischenlage gelten:

Fig. 392.



(nach S. 295) $\quad {}^1/_2\, J_x \omega^2 = M g z_0,$

$$\omega^2 = \frac{2 M g z_0}{J_x} = \frac{3 g \cos \vartheta}{a},$$

(nach S. 304) $$\varepsilon = \frac{M g e \sin \vartheta}{J_x} = \frac{3}{2} \frac{g \sin \vartheta}{a}.$$

Die Kräftegruppe $[-mp]$ liefert hiernach (Gl. 1, S. 316)

$$X = 0;$$

$$Y = \frac{Ma}{2} \sin \vartheta \frac{3 g \cos \vartheta}{a} + \frac{Ma}{2} \cos \vartheta \frac{3}{2} \frac{g \sin \vartheta}{a}$$

$$= \frac{9}{4} Mg \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{9}{8} Mg \sin 2\vartheta;$$

$$Z = \frac{Ma}{2} \cos \vartheta \frac{3 g \cos \vartheta}{a} - \frac{Ma}{2} \sin \vartheta \frac{3}{2} \frac{g \sin \vartheta}{a}$$

$$= \frac{Mg}{2} \left(3 - 3 \sin^2 \vartheta - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) = \frac{Mg}{8} (3 + 9 \cos 2\vartheta);$$

$$\mathfrak{M}_x = {}^1/_2\, M g a \sin \vartheta;$$

$$\mathfrak{M}_y = 0; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit diesen Kräften müssen die Schwerkraft Mg und die Widerstände der Drehachse im Gleichgewichte sein. Letztere brauchen in diesem Falle, weil $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z = 0$ sind, nur in dem Punkte A der Achse anzugreifen; man zerlege sie in V und H. Dann mufs

$$H = Y = \frac{9}{8} Mg \sin 2\vartheta \quad \text{sein}$$

ebenso $$Mg - V = -Z = -{}^1/_8\, Mg (3 + 9 \cos 2\vartheta),$$

d. h. $$V = {}^1/_8\, Mg (11 + 9 \cos 2\vartheta).$$

Der wagerechte Achsenwiderstand H ist für $\vartheta = 90^0$, d. h. in der Anfangslage gleich Null, ebenso in der tiefsten Lage für $\vartheta = 0$; am gröfsten wird er für $\vartheta = 45^0$, nämlich $H_{max} = {}^9/_8\, Mg$.

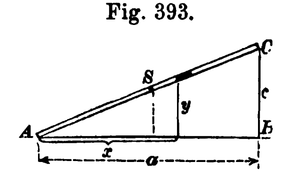
Der lotrechte Widerstand ist

$$\text{für } \vartheta = 90^0: \quad V = {}^1/_4\, Mg,$$
$$\text{für } \vartheta = 45^0: \quad V = {}^{11}/_8\, Mg,$$
$$\text{für } \vartheta = 0: \quad V_{max} = {}^5/_2\, Mg.$$

Diese Gröfstwerte von H und V sind im Verhältnis zum Gewicht Mg des Stabes erheblich. Die Kraft H wirkt abwechselnd bald nach links, bald nach rechts, je nach der Lage des schwingenden Körpers. — Von besonderer Wichtigkeit sind diese Kräfte, wenn der schwingende Körper eine schwere Glocke ist. Die Achswiderstände H und V müssen dann von dem sog. Glockenstuhle ausgeübt werden. Der fortwährende Wechsel des Sinnes der Kraft H ist für den Turm besonders gefährlich. Der Rechnungsgang ist im wesentlichen derselbe wie in dem vorliegenden Falle. — Wurde die Stange in der Anfangslage ($\vartheta = 90^0$) am linksseitigen Ende etwa unterstützt, so war im Ruhezustande $V = {}^1/_2\, Mg$; durch plötzliches Loslassen des Endes verändert sich V auf ${}^1/_4\, Mg$. — Weitere Beispiele sollen sich auf gleichförmige Drehung beziehen.

Beispiel 2: Eine materielle Gerade AC (Fig. 393) drehe sich gleichförmig um eine Achse AB; der Punkt A sei unmittelbar, der Punkt C mittels einer gewichtlosen Stange c mit der Achse verbunden. Die Projektionen der Stange seien a und c. Da der Körper ein ebenes Gebilde, so lege man ACB in die xy-Ebene, dann ist $y_0 = {}^1/_2\, c$; $z_0 = 0$; ferner wird $\Sigma mxz = C_y = 0$, weil sämtliche z-Werte Null sind. Die Zusammensetzung der sämtlichen Zentrifugalkräfte beschränkt sich daher nach Fig. 391 auf eine Einzelkraft $Y = My_0\,\omega^2 = {}^1/_2\, Mc\,\omega^2$, im Abstand $u = \frac{C_z}{My_0}$ rechts von A liegend.

Fig. 393.



Ein Massenteilchen von der Länge ds hat die Masse $m = \frac{\gamma}{g} F \cdot ds$, wenn F der Querschnitt des Stabes, γ die Dichte. Man kann aber bei der Berechnung von u die selbstverständlichen Faktoren $F\gamma : g$ fortlassen, wenn man $m = ds$ und ebenso $M = s =$ der Länge der Stange setzt. Das Teilchen liefert zu C_z den Beitrag $ds \cdot xy$, was wegen $y = xc : a$ und $ds = dx \cdot s : a$ geschrieben werden kann:

$$mxy = \frac{sc}{a^2} x^2\, dx.$$

Daraus folgt
$$C_z = \Sigma mxy = \frac{sc}{a^2} \int_0^a x^2\, dx = \frac{1}{3}\, sca.$$

Weil nun nach obigem $My_0 = {}^1/_2\, cs$, so wird $u = {}^2/_3\, a$.

Derartig einfache Fälle kann man auch leicht ohne Anwendung der allgemeinen Formeln unmittelbar behandeln. Dem Teilchen ds entspricht die Zentrifugalkraft $ds \cdot y\,\omega^2$. Die Mittelkraft R der Zentrifugalkräfte ist die Summe der gleichgerichteten Kräfte $[ds \cdot y\,\omega^2]$, mithin

$$R = \omega^2 \int ds \cdot y = \omega^2 s y_0 = \omega^2 s\, {}^1/_2\, c = {}^1/_2\, M\omega^2 c.$$

Nach dem Satze der Momente wird dann in Bezug auf A:

$$Ru = \omega^2 \int ds \cdot xy = \omega^2 s \frac{c}{a^2} \int_0^a x^2 \, dx,$$

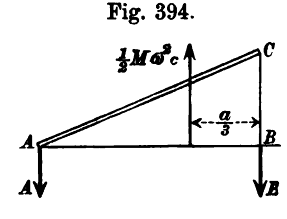
$$\text{d. h.} \quad {}^1/_2\, s c \omega^2 u = {}^1/_3\, \omega^2 s c a, \quad \text{wonach} \quad u = {}^2/_3\, a.$$

Dafs die Kraft ${}^1/_2 M\omega^2 c$ durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 394) geht, folgt auch daraus, dafs man die Teilkraft $ds \cdot y\omega^2$ schreiben kann

$$= \omega^2 \frac{s}{a} y \cdot dx,$$

d. h. proportional dem Flächenstreifen $y \cdot dx$ des Dreiecks.

Fig. 394.



Wirken nun auf die Stange keine bewegenden Kräfte [K], so müssen die etwa in A und B angreifenden Achsenwiderstände mit R im Gleichgewichte sein. Daher wird

$$A = {}^1/_3 R = {}^1/_6 M\omega^2 c; \quad B = {}^2/_3 R = {}^1/_3 M\omega^2 c.$$

Steht die Drehachse AB lotrecht und wirkt die Schwere auf die sich drehende Stange (Fig. 395), so müssen die Schwere Mg und die Widerstände A und B zusammen mit $R = {}^1/_2 M\omega^2 c$ im Gleichgewichte sein. $X = 0$ erfordert, dafs etwa in A ein lotrecht aufwärts gerichteter Widerstand $A_x = Mg$ wirke. Es ist ferner in Bezug auf B:

Fig. 395.

$$0 = -\frac{1}{2} M\omega^2 c \frac{a}{3} + A_y a - Mg \frac{c}{2},$$

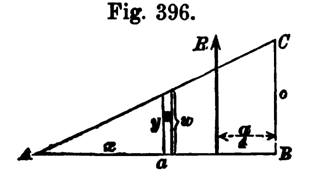
$$\text{d. h.} \quad A_y = Mg \frac{c}{2a} + \frac{Mc\omega^2}{6} = \frac{Mgc}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{\omega^2}{3g}\right)$$

$$\text{und ebenso} \quad B_y = \frac{Mgc}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\frac{\omega^2}{g}\right).$$

Es wird der Widerstand $B_y = 0$ für $\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{a}$; unter dieser Bedingung bewegt sich die Stange als ein physisches Kegelpendel; d. h. nicht durch einen Stab BC, sondern nur infolge der Drehung wird der Winkel α unverändert erhalten. Für das mathematische Kegelpendel (S. 69) war $\omega^2 = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{c} = \frac{gc}{ac} = \frac{g}{a}$.

Beispiel 3: Der sich gleichförmig um die Achse AB drehende Körper sei eine materielle Dreieckfläche ABC (Fig. 396). Dann ist, wenn man die Masse der Flächeneinheit $= 1$ setzt, $M = {}^1/_2 ac$, $y_0 = {}^1/_3 c$, mithin die gesamte Zentrifugalkraft $R = {}^1/_3 Mc\omega^2$ im Abstand u von A. Um $C_z = \Sigma mxy$ zu bestimmen, bedenke man, dafs $C_z = \int dx \cdot dy \cdot xy$. Alle

Fig. 396.



Teilchen eines lotrechten Flächenstreifens haben übereinstimmendes x und dx liefern daher zu C_z den Beitrag $x\,dx\int_0^{\omega} y \cdot dy, = x\,dx\, {}^1/_2\, \omega^2$, wenn ω die Höhe des Streifens; darin ist $\omega = cx : a$, also wird

Fig. 397.

$$C_z = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{a^2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{1}{8}\,c^2 a^2 = \frac{1}{4}\,M a c.$$

Mithin nach Fig. 391 $\quad u = \frac{C_z}{M y_0} = \frac{{}^1/_4\, M a c}{{}^1/_3\, M c} = {}^3/_4\, a.$

Die entsprechenden Achsenwiderstände werden dann

$$A = {}^1/_4\, R = {}^1/_{12}\, M c \omega^2 \quad \text{und}$$
$$B = {}^3/_4\, R = {}^1/_4\, M c \omega^2.$$

Stellen wir wiederum die Drehachse lotrecht (Fig. 397) und lassen die Schwere wirken, so sind in A und B die wagerechten Widerstände A_y und B_y nötig, für welche gilt:

$${}^1/_4\, a R = A_y\, a - M g\, {}^1/_3\, c,$$

mithin $A_y = {}^1/_4\, R + {}^1/_3\, M g\,\frac{c}{a}$ und ebenso $B_y = {}^3/_4\, R - {}^1/_3\, M g\,\frac{c}{a}$.

Wiederum wird die Befestigung bei B unnötig, wenn

$${}^3/_4\, R = {}^1/_4\, M c \omega^2 = {}^1/_3\, M g\,\frac{c}{a}, \quad \text{d. h. für} \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\,\frac{g}{a}.$$

7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers.

a) Arbeitsvermögen.

Ein Körper drehe sich um eine Schwerpunktsachse, die zur x-Achse gewählt werden möge, mit der Winkelgeschwindigkeit ω; zugleich werde die Achse mit einer der xz-Ebene parallelen Geschwindigkeit u parallel verschoben, und zwar möge u mit der x-Richtung den Winkel α bilden (Fig. 398). Dann setzt sich die gesamte Geschwindigkeit v eines Punktes der Koordinaten x, y, z im Abstande ϱ von der Achse aus den Einzelgeschwindigkeiten u und $\varrho\omega$ zusammen.

Fig. 398.

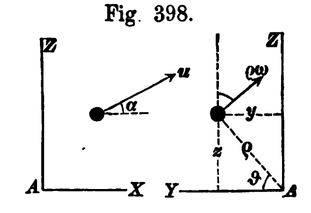


Fig. 398 stellt das Achsenkreuz in zwei Projektionen dar. Bildet ϱ mit AY den Winkel ϑ, so ist $\varrho\cos\vartheta = y$, $\varrho\sin\vartheta = z$; somit zerlegt sich $\varrho\omega$ in $-z\omega$ und $y\omega$. Die Seitengeschwindigkeiten eines Punktes nach den Achsenrichtungen werden dann

$$v_x = u\cos\alpha; \quad v_y = -z\omega; \quad v_z = y\omega + u\sin\alpha.$$

Daher wird

$$v^2 = u^2 \cos^2\alpha + z^2\omega^2 + y^2\omega^2 + 2y\omega u \sin\alpha + u^2 \sin^2\alpha$$
$$= u^2 + \varrho^2\omega^2 + 2y\omega u \sin\alpha.$$

Das Arbeitsvermögen des Körpers ergibt sich dann zu

$$\Sigma(1/2\, m v^2) = 1/2\, M u^2 + 1/2\, \omega^2 \Sigma m \varrho^2 + \omega u \sin\alpha \Sigma m y,$$

weil u, ω und α für alle Teile des Körpers dieselben. Da aber die Ebene AXZ den Schwerpunkt enthält, so ist $\Sigma m y = 0$ (S. 147), mithin das Arbeitsvermögen

$$1/2\, M u^2 + 1/2\, J \omega^2,$$

wenn J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse. Das Arbeitsvermögen setzt sich hiernach aus zwei Teilen zusammen, deren einer das Arbeitsvermögen wegen der Verschiebung, deren anderer dasjenige wegen der Drehung bedeutet.

b) Bewegung eines freien Körpers.

Wirken an einem freien starren Körper beliebige äufsere Kräfte K_1, K_2, K_3 . . ., so füge man im Schwerpunkt S des Körpers je zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K hinzu. Dann lassen sich im Schwerpunkte die den gegebenen gleichgesinnten Kräfte K zu einer Mittelkraft R vereinigen, während jede gegebene Kraft K mit der entgegengesetzt hinzugefügten ein Kräftepaar bildet, deren Achsenstrecken ein Gesamtmoment $\mathfrak{M}$ (S. 136) liefern. Der Schwerpunkt S bewegt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes nur unter Einwirkung der Kraft R mit der Beschleunigung $p_0 = R:M$. (Wäre etwa R unveränderlich nach Gröfse und Richtung, so würde der Schwerpunkt eine Parabel beschreiben, S. 59.) Das Achsenmoment $\mathfrak{M}$ bewirkt aber noch eine Drehung um den Schwerpunkt. Denkt man sich nun mit dem Schwerpunkt ein Achsenkreuz verbunden, welches dessen Bewegung völlig mitmacht, aber stets der Anfangslage parallel bleibt, so kann man die Drehung des Körpers auffassen als scheinbare Bewegung gegen dieses mit der Beschleunigung p_0 sich verschiebende Achsenkreuz. Diese Bewegung kann dann betrachtet werden wie eine Drehung um den festliegenden Schwerpunkt, wenn man an allen Punkten des Körpers die entsprechenden Ergänzungskräfte $[- m p_0]$ anbringt. Weil diese sich gleichmäfsig über die ganze Masse verteilen, so liefern sie eine Mittelkraft $- M p_0$, die durch den

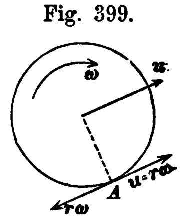
Schwerpunkt geht, daher auf die Drehung um ihn keinen Einfluſs haben kann. Die Drehung geschieht also gerade so, als ruhte der Schwerpunkt.

Ist nun die durch den Schwerpunkt gelegte Achsenstrecke des Gesamt-Kräftepaares 𝔐 eine freie Achse und hat der Körper anfänglich keine Drehung um eine andere Achse, so wird die Drehachse ihre Richtung im Raum und im Körper nicht ändern, und der Körper wird sich um diese Achse des Gesamt-Kräftepaars 𝔐 gerade so drehen, als wäre sie eine festgehaltene Achse. Denn, hielte man sie tatsächlich fest, so würden die Widerstände des Festhaltens wegen dieser Eigenschaft der freien Achse (S. 317) zu Null werden. Die Drehung um diese Achse erfolgt dann mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \mathfrak{M} : J$ (S. 304, Gl. 2). — Dies trifft zu für eine gleichartige Kugel unter Einwirkung beliebiger aber gleichbleibender Kräfte, wenn sie zu Anfang keine Drehbewegung um eine andere Achse als die Achse des Gesamtmomentes 𝔐 hatte. Der Schwerpunkt beschreibt eine Parabel; die Achse 𝔐 verschiebt sich mit dem Schwerpunkte und bildet, weil jeder Durchmesser eine freie Achse ist, fortwährend die Drehachse für den Körper. — Ist aber die Achse 𝔐 durch den Schwerpunkt keine freie Achse, oder ist zu Anfang schon eine Drehung um eine andere Achse vorhanden, so ändert die Achse, um welche die Drehung geschieht, fortwährend ihre Richtung im Körper und im Raum; es entsteht neben der Bewegung des Schwerpunktes, die hiervon nicht berührt wird, im allgemeinen eine unregelmäſsig wirbelnde Bewegung um den Schwerpunkt, die so verwickelt ist, daſs sie an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden soll; man kann solche Bewegung beobachten, wenn man einen Stab so fortwirft, daſs er eine Drehung um eine schief zu ihm liegende Achse mit auf den Weg bekommt. Wird ein Stab (Speer oder Ger) in der Mitte erfaſst und in wagerechter Lage so fortgeworfen, daſs er keine Drehung auf den Weg bekommt, so beschreibt sein Schwerpunkt — abgesehen von der Wirkung des Luftwiderstandes — eine Wurfparabel; die Stange erfährt, weil $\mathfrak{M} = 0$ ist, keine Drehung, sondern bleibt immer ihrer Anfangslage parallel, stellt sich aber nicht etwa tangential zur Wurflinie. Anders ist es mit einem gespitzten und gefiederten Pfeile; dieser wird durch den Luftwiderstand stets so gedreht, daſs seine Längenrichtung ziemlich tangential zur Wurflinie sich stellt.

c) Rollbewegung auf schiefer Ebene. Fuhrwerke.

Bewegung ohne Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Hat ein Umdrehungskörper eine Winkelgeschwindigkeit ω rechtsherum um seine geometrische Achse und wird er gleichzeitig rechtwinklig zur Achse mit der Geschwindigkeit $u = r\omega$ nach rechts verschoben, so setzen sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte eines Kreises vom Halbmesser r aus den Einzelgeschwindigkeiten $r\omega$ rechtwinklig zum Drehungshalbmesser und $u = r\omega$ zusammen. An dem Punkt A (Fig. 399) ist dann die Gesamtgeschwindigkeit $v = 0$. Bringt man den Körper an dieser Stelle mit einer Ebene in Berührung, welche mit u und der geometrischen Achse des Körpers parallel ist, so wird der Umdrehungskörper sich gegen diese Ebene in der Art bewegen, daſs die Berührungsstelle fortwährend wechselt, daſs an der Berührungsstelle aber stets die relative Gleitgeschwindigkeit Null ist. Eine solche Bewegung nennt man eine **Rollbewegung.** Andere, ebenfalls aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzte Bewegungen, bei denen aber die Bedingung $r\omega = u$ nicht erfüllt ist, erscheinen äuſserlich ebenfalls wie Rollbewegungen, sind es aber nicht, sondern sind, weil an der Berührungsstelle die relative Gleitgeschwindigkeit nicht gleich Null, Gleitbewegungen sich drehender Körper auf einer Ebene. Für die Kräfte und damit auch für die Gesetze der Bewegung ist es von maſsgebender Bedeutung, ob die Gleitgeschwindigkeit an der Berührungsstelle Null ist oder nicht. Im ersteren Falle kommt nämlich die Reibung im allgemeinen mit einem Betrage $T \leq fN$ zur Wirkung, während, wenn u nur im geringsten von $r\omega$ abweicht, der volle Betrag der Reibung fN wirksam wird.

Fig. 399.



An dieser Stelle behandeln wir die reine Rollbewegung und werden die Gleitbewegung S. 338 besprechen.

Das Arbeitsvermögen der Rollbewegung ist nach S. 324 $^1/_2 Mu^2 + {^1/_2}\omega^2 J$, oder, wenn μ die auf den Halbmesser des Rollkreises r bezogene Masse (wegen $r\omega = u$):

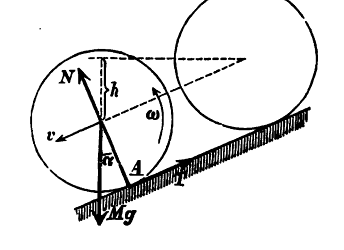
$$1) \qquad {^1/_2}(M + \mu)\, u^2.$$

Wird ein Umdrehungskörper (Zylinder, Reif oder Kugel) mit der Geschwindigkeit Null auf eine schiefe Ebene gesetzt und lediglich

der Einwirkung der Schwere Mg und des Normalwiderstandes N der Ebene überlassen, so würde er unter Annahme völliger Glätte nicht in Drehung geraten können, weil Mg und N beide durch den Schwerpunkt gehen; es würde der Körper also eine beschleunigte, rein fortschreitende Gleitbewegung ausführen. In Wirklichkeit setzt sich ein Reibungswiderstand T dem Gleiten entgegen, und wenn dieser in der erforderlichen Gröfse zur Wirkung gelangen kann, so wird er das Gleiten verhindern und eine Rollbewegung erzeugen. Unter welchen Bedingungen dies geschieht, bleibt noch zu untersuchen. Daher setzen wir zunächst voraus, dafs eine vollkommene Rollbewegung stattfinde, welche entweder durch Reibung erzeugt, oder durch einen um den Rollkreis geschlungenen, von A aus auf der Ebene nach oben hin gerade gestreckten und an ihr befestigten Faden, oder endlich durch eine Verzahnung von Rollkreis und Bahn erzwungen werde. Dann wird durch eines dieser Mittel die für das Rollen erforderliche Umfangskraft T geliefert.

Beginnt die Rollbewegung mit der Geschwindigkeit Null und ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem dieser um h gesunken, v geworden (Fig. 400), so ist die Zunahme an Arbeitsvermögen $\frac{1}{2}(M + \mu) v^2$. Arbeit wird nur von der Schwere im Betrag Mgh verrichtet, denn N und T greifen an der Berührungsstelle A an, deren Geschwindigkeit Null ist. Hiernach mufs $\frac{1}{2}(M + \mu) v^2 = Mgh$ sein, oder

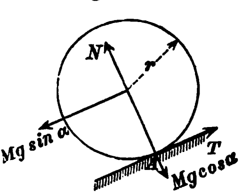
Fig. 400.



2) $$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}}.$$

Will man die Bewegung in ihren Einzelheiten kennen lernen, so mufs man die Beschleunigungen beider Einzelbewegungen berechnen. Zerlegt man Mg in $Mg \sin\alpha$ und $Mg \cos\alpha$ (Fig. 401), so mufs

Fig. 401.



3) $$N = Mg \cos\alpha$$

sein, weil der Schwerpunkt sich geradlinig bewegt, d. h. keine Zentripetalbeschleunigung erfährt (S. 67). Die Beschleunigung p des Schwerpunktes erhält man nach S. 166, indem man T an den Schwerpunkt

verschoben denkt, mithin ist $Mp = Mg \sin\alpha - T$. Weil T noch unbekannt, ist eine zweite Gleichung erforderlich. Da in jedem Augenblick $r\omega = v$, so mufs das gleiche Verhältnis auch für die Beschleunigungen gelten, d. h. $r\varepsilon = p$. Weil nun die Umfangsbeschleunigung $r\varepsilon = p$ von T herrührt, so ist nach Gl. 4, S. 305:

$$\mu p = T. \tag{4}$$

Führt man dies in obigen Ausdruck für Mp ein, so ergibt sich schliefslich

$$p = \frac{Mg \sin\alpha}{M + \mu} = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{\mu}{M}}, \tag{5}$$

d. h. die treibende Seitenkraft der Schwere $Mg \sin\alpha$ ist nicht allein durch die Masse M, sondern durch die Summe $M + \mu$ zu teilen, da sie nicht nur die fortschreitende Masse M, sondern zugleich die Schwungmasse μ zu beschleunigen hat (vgl. S. 213).

Hiermit ist auch die Umfangskraft T bestimmt (Gl. 4) zu

$$T = \mu p = \frac{\mu Mg \sin\alpha}{M + \mu} = \frac{Mg \sin\alpha}{1 + \frac{M}{\mu}}. \tag{6}$$

Soll nun die Rollbewegung allein durch die Reibung, ohne sonstigen Zwang, gesichert sein, so mufs $T \leqq fN = fMg \cos\alpha$ sein, oder

$$\frac{\mu Mg \sin\alpha}{M + \mu} \leqq fMg \cos\alpha.$$

Das gibt, nach α aufgelöst:

$$\operatorname{tg}\alpha \leqq f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right). \tag{7}$$

Genügt die Neigung der schiefen Ebene dieser Bedingung, so ist Rollbewegung möglich. Bei zu grofser Neigung ist $fMg \cos\alpha$ zu klein, um die der grofsen Schwerpunktsbeschleunigung p entsprechende Umfangsbeschleunigung zu erzeugen; es wird dann eine Gleitbewegung entstehen.

Natürlich ist die betrachtete Rollbewegung nur möglich, wenn die Wirkungsebene der Kräfte N und T durch den Schwerpunkt geht. Es findet dies statt beim Zylinder, beim Reif, bei der Kugel; nicht beim Kegel, wohl aber bei einem Doppelkegel und allgemeiner bei jeder Achse, auf der zwei symmetrische Umdrehungskörper als

Räder befestigt sind. Da beim dünnen Reif $\mu = M$, beim Zylinder $\mu = {}^1/_2 M$, bei der Kugel $\mu = 0{,}4\,M$ (S. 300 u. 301), so wird

für den Reif:

$$v = 0{,}707\sqrt{2gh} = \sqrt{gh};\; p = {}^1/_2\, g \sin\alpha;\; T = {}^1/_2\, Mg \sin\alpha;\; \operatorname{tg}\alpha \leqq 2f;$$

für den Zylinder:

$$v = 0{,}817\sqrt{2gh};\; p = {}^2/_3\, g \sin\alpha;\; T = {}^1/_3\, Mg \sin\alpha;\; \operatorname{tg}\alpha \leqq 3f;$$

für die Kugel:

$$v = 0{,}845\sqrt{2gh};\; p = {}^5/_7\, g \sin\alpha;\; T = {}^2/_7\, Mg \sin\alpha;\; \operatorname{tg}\alpha \leqq 3{,}5f.$$

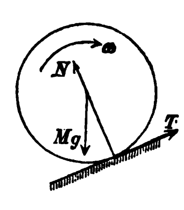
Dagegen würde für reibungsloses Gleiten gelten

$$v = \sqrt{2gh};\quad p = g \sin\alpha.$$

Reif, Zylinder und Kugel, auf schiefer Ebene nebeneinander losgelassen, bewegen sich hiernach mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Kugel eilt am meisten; u. zw. sind dabei die Durchmesser ohne Einfluſs; nur auf die Form der Körper kommt es an. Hierbei wurde kein Rollwiderstand vorausgesetzt, der natürlich die Ergebnisse ändern muſs.

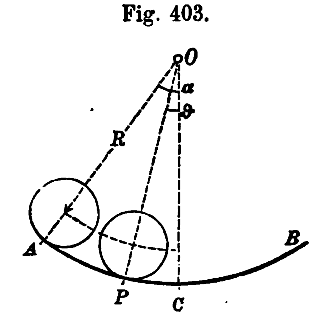
Wird der Körper in eine aufwärts gerichtete Rollbewegung versetzt und der Schwere überlassen, so könnte man auf den ersten Blick vielleicht meinen, der Sinn der Reibung T müſste mit der Umkehrung der Bewegung sich ebenfalls umkehren. Dies wäre jedoch ein Trugschluſs, denn an der Berührungsstelle findet ja weder in der Richtung aufwärts, noch abwärts ein Gleiten statt, mag der Körper aufwärts oder abwärts rollen. Daſs vielmehr T beim Aufwärtsrollen denselben Sinn behalten muſs wie beim Abwärtsrollen, erkennt man aus folgendem: Beim Aufwärtsrollen wird die Arbeit der Schwere negativ, somit muſs die Bewegung des Schwerpunktes verzögert sein, und Gleiches folgt hieraus für die Drehbewegung. Damit aber die einzige Drehkraft T beim Aufwärtsrollen eine Verzögerung der Drehung erzeuge, muſs sie (Fig. 402) aufwärts gerichtet sein. Da nun die Kräfte jetzt genau dieselben sind wie beim Abwärtsrollen, so gelten auch für p, T und $\operatorname{tg}\alpha$ dieselben Gleichungen wie beim Abwärtsrollen.

Fig. 402.



Geschieht die Rollbewegung nicht auf einer schiefen Ebene, sondern im unteren Teil einer Zylinderfläche vom Halbmesser $R+r$ mit wagerechten Erzeugenden (Fig. 403), so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Zwischenlage P nach der auch hier gültigen Gl. 2 (S. 327)

Fig. 403.



$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{\mu}{M}}} = \sqrt{\frac{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{1+\frac{\mu}{M}}},$$

wenn die Bewegung bei A mit der Geschwindigkeit Null begann. Bei einem mathematischen Pendel von der Fadenlänge R würde

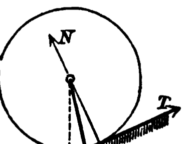
$$v_1 = \sqrt{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)} \quad \text{sein.}$$

Die Vertauschung des einfachen Pendels mit einem hin und her rollenden Körper ist also (wegen der Verkleinerung der Beschleunigung des Schwerpunktes, S. 328) gleichbedeutend mit einer Ersetzung der Fallbeschleunigung g durch den kleineren Wert $g:\left(1+\frac{\mu}{M}\right)$; mithin wird die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung sein

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}. \tag{8}$$

Bewegung der Fuhrwerke mit Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Tragen die auf schiefer Ebene rollenden Räder von der Gesamtmasse M ein Fuhrwerk von der Masse M_1, welches nur an der Verschiebung mit der Beschleunigung p Teil nimmt, so denkt man sich zur Berechnung der letzteren die Masse M_1 zunächst an der Achse des rollenden Körpers reibungslos aufgehängt. Die Gelenkstange zur Aufhängung nimmt dann im relativen Ruhezustande gegen die Achse des rollenden Körpers eine Richtung an, welche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um einen Winkel β abweicht (Fig. 404). Nennt man die Spannkraft der Stange, die zugleich den Druck auf die Achse bedeutet, D, so müssen D und β so bestimmt werden, dafs M_1 die Verschiebungsbeschleunigung p erfahre. Ersetzt man die Stange durch die Kraft D und zerlegt die an M_1 wirkenden D und $M_1 g$

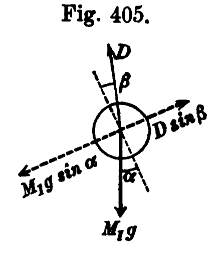
Fig. 404.



parallel zur schiefen Ebene und rechtwinklig dazu (Fig. 405), so wird $D \cos\beta = M_1 g \cos\alpha$, ferner $M_1 p = M_1 g \sin\alpha - D \sin\beta$ oder $D \sin\beta = M_1 g \sin\alpha - M_1 p$. Daraus folgt

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \frac{p}{g\cos\alpha};$$

Fig. 405.



$$9)\quad D = M_1 g \sqrt{1 - 2\sin\alpha\,\frac{p}{g} + \left(\frac{p}{g}\right)^2}.$$

An dem rollenden Körper M wirken nun die in Fig. 406 angegebenen Kräfte, wo $\mathfrak{M}$ das gesamte, aus Zapfenreibung und Rollwiderstand herrührende Moment bedeutet. Nach S. 278 ist $\mathfrak{M} = {}^1\!/_2\, Dfd + Ne$, wenn d der Zapfendurchmesser, e der Arm des Rollwiderstandes. Dann gilt für die Beschleunigung p des Schwerpunktes

$$Mp = Mg\sin\alpha + D\sin\beta - T \quad \text{oder}$$

$$10)\quad Mp = Mg\sin\alpha + M_1 g\sin\alpha - M_1 p - T;$$

Fig. 406.

und für die Umfangsbeschleunigung der Drehung nach S. 305

$$\mu p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R}, \quad \text{oder}$$

$$T = \mu p + \frac{Dfd}{2R} + \frac{Ne}{R},$$

wenn R der Halbmesser des Rollkreises.
Setzt man dies in Gl. 10 ein, so ergibt sich

$$(M + M_1 + \mu)p = (Mg + M_1 g)\sin\alpha - \frac{Dfd}{2R} - \frac{Ne}{R}.$$

Diese Gleichung ist nach p nicht ohne weiteres aufzulösen, weil in D nach Gl. 9 die Gröfse p ebenfalls noch vorkommt. Für alle wichtigeren Fälle aber, in denen ein Fuhrwerk frei läuft, ist α und daher auch $p:g$ nur klein im Verhältnisse zu Eins, so dafs man mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ setzen kann. Mithin wird der Zapfenreibungswiderstand $M_1 gfd:(2R)$, und, weil $N = (M + M_1) g \cos\alpha$, der Rollwiderstand $(M + M_1) g \cos\alpha \cdot e : R$, wobei für schwache Neigungen $\cos\alpha$ mit Eins vertauscht werden darf.

Führt man aber, wie S. 280, wiederum die Gleichgewichts-Neigung α_0 ein, welche so beschaffen, dafs, wenn $\alpha = \alpha_0$, $p = 0$ ist, so wird die Summe der beiden Widerstände wieder gleich mit

$(M + M_1) g \sin \alpha_0$, und wenn man dann noch, wie früher (S. 279), $\sin \alpha$ mit α vertauscht, so entsteht

$$11) \qquad (M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g (\alpha - \alpha_0),$$

worin auf der linken Seite die Beschleunigung p mit der Summe der drei Massen multipliziert erscheint, welche an der Beschleunigung p Teil nehmen (ebenso wie bei der Fallmaschine, S. 313).

Beispiel: Für einen Eisenbahnwagen auf schiefer Ebene sei $Mg = 2000$, $M_1 g = 8000$, $\mu g = 1000$ kg, $\alpha = 1:200$, $\alpha_0 = 1:400$. Dann wird, wenn man auf beiden Seiten der Gl. 11 statt der Massen die Gewichte einführt,

$$11\,000 p = 10\,000 g \cdot {}^1/_{400} \quad \text{oder}$$

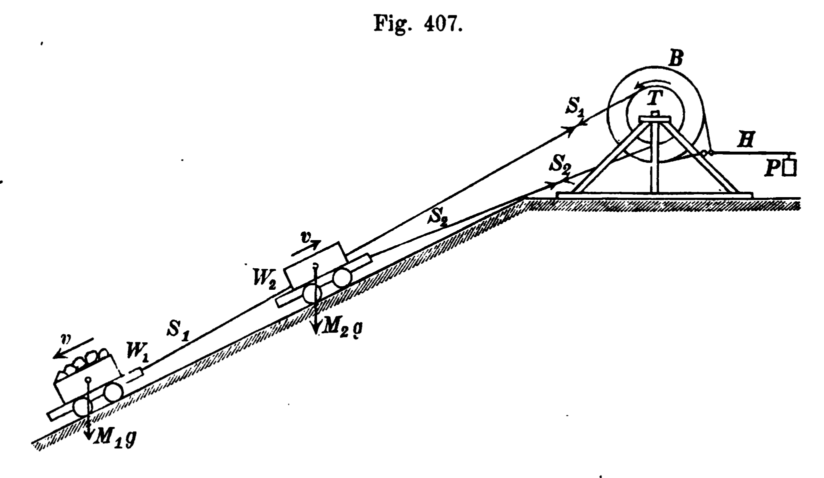
$$p = \frac{g}{440} = 0{,}023 \text{ m/sek}^2.$$

Ohne Geschwindigkeit losgelassen, wird der Wagen in 10 Sekunden eine Strecke $^1/_2 pt^2 = 1{,}1$ m zurückgelegt haben, innerhalb einer Minute aber 36 mal so viel, nämlich 39,6 m. Der Wagen läuft auf dem Gefälle 1 : 200 unter Einflufs der Widerstände ganz so, als ob er widerstandslos sich auf einem um α_0 schwächeren Gefälle 1 : 400 bewegte.

d) Das Anhalten der Wagen einer selbstwirkenden Seilbahn, eines sog. Bremsberges.

Hat man beim Bau eines Einschnittes, beim Betrieb eines Steinbruches, Bergwerkes oder dergl. Erd- oder Steinmassen nach

Fig. 407.



einem tiefer gelegenen Orte zu befördern, so kann zu diesem Zweck eine Seilbahn benutzt werden. Auf dem einen Gleise fährt ein

beladener Wagen W_1 hinab und zieht durch das Übergewicht der Ladung einen leeren Wagen W_2 auf dem anderen Gleise empor (Fig. 407). Jeder Wagen ist zu dem Zweck an einem Drahtseil (S_1 und S_2) befestigt, und beide Seile sind derartig um eine am oberen Ende der Bahn gelegte Seiltrommel T geschlungen, dafs die Bewegung in der gewünschten Weise vor sich gehen kann.

Zur Regelung der Geschwindigkeit und zum Anhalten der Wagen dient eine mit der Seiltrommel verbundene Bremse B, deren längerer Hebel H durch ein Gewicht P niedergedrückt wird.

Der Neigungswinkel der schiefen Ebene sei α; das beladene Fuhrwerk habe das Gewicht $M_1 g$, die Schwungmasse seiner Räder und Achsen, d. h. ihre auf den Rollkreis bezogene Masse, sei μ_1; für das leere Fuhrwerk seien die entsprechenden Gröfsen $M_2 g$ und μ_2. Ein solcher Wagen habe auf einem Gleise, wie es in der Förderbahn liegt, ein Gleichgewichts-Gefälle α_0, d. h. $M_1 g \cdot \alpha_0$ stellt die Summe der Zapfenreibungs- und Rollwiderstände des Wagens vom Gewicht $M_1 g$ dar auf wagerechter Bahn (s. S. 280); dann wird der Gesamtwiderstand des Wagens auf der geneigten Bahn nur $M_1 g \cos\alpha \cdot \alpha_0$ betragen, weil der Wagen nur mit der Seitenkraft $M_1 g \cos\alpha$ auf das Gleis drückt. Soll das bergab laufende Fuhrwerk angehalten werden, so mufs man ihm eine Verzögerung erteilen, die einer a u f w ä r t s gerichteten Beschleunigung p_1 gleichkommt. Im Sinne dieser Beschleunigung wirken an dem Wagen die Spannkraft S_1 seines Seiles, sein Widerstand $M_1 g \cos\alpha \cdot \alpha_0$, während die Seitenkraft $M_1 g \sin\alpha$ seines Gewichtes entgegengesetzt gerichtet ist. Da nun die Masse M_1 des ganzen Fuhrwerks die Verschiebungs-Beschleunigung p_1, die Schwungmasse μ_1 der Räder die gleiche Umfangs-Beschleunigung erfährt, so wird, wie in Gl. 10, S. 332

$$1) \qquad (M_1 + \mu_1)\, p_1 = S_1 - M_1 g\,(\sin\alpha - \alpha_0 \cos\alpha).$$

Das aufwärts gehende leere Fuhrwerk $M_2 g$ erfährt die gleiche Beschleunigung a b w ä r t s; gleichwohl möge dieselbe einstweilen zum Unterschiede p_2 genannt werden. In ihrem Sinne wirken $M_2 g \sin\alpha$ und der der Aufwärtsbewegung entgegen gerichtete Widerstand $M_2 g \cos\alpha \cdot \alpha_0$; aufwärts wirkt die Spannkraft S_2 des an diesem Wagen befestigten Seiles; daher wird

$$2) \qquad (M_2 + \mu_2)\, p_2 = M_2 g\,(\sin\alpha + \alpha_0 \cos\alpha) - S_2.$$

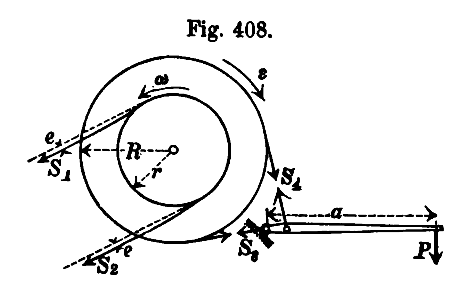
Aus Gl. 1 und 2 folgen die Seilkräfte

3) $$S_1 = M_1 g\,(\sin\alpha - \alpha_0 \cos\alpha) + (M_1 + \mu_1)\,p_1;$$

4) $$S_2 = M_2 g\,(\sin\alpha + \alpha_0 \cos\alpha) - (M_2 + \mu_2)\,p_2.$$

Sind S_3 und S_4 (Fig. 408) die Spannkräfte des Bremsbandes der mit der Trommel von Halbmesser r verbundenen Bremsscheibe vom Halbmesser R, so erzeugt die Bandreibung an der sich linksherum drehenden Scheibe ein Widerstandsmoment

Fig. 408.



5) $$(S_4 - S_3)\,R = S_3\,(e^{f\alpha} - 1)\,R = S_4 \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}}\,R$$

(s. S. 259 und 262). An der Trommelachse entsteht ein Zapfenreibungsmoment $Df \cdot {}^1\!/_2\, d$, wenn D der Zapfendruck, d der Zapfendurchmesser ist. Wegen der Seilsteifigkeit (S. 267) vermindert sich der Hebelarm der Spannkraft S_1, welche im Sinne der Drehungsrichtung der Trommel wirkt, von r auf $r - e$, während derjenige der Seilkraft S_2 sich von r auf $r + e$ vergröfsert. Ist δ der Durchmesser des Seiles, so setze man (nach Gl. 3, S. 267) $e = 6{,}5\,\delta^2$ (alle Mafse in Metern). Die linksherum sich drehende Trommel mufs beim Anhalten eine rechtsherum gerichtete Winkelbeschleunigung ε erfahren. Wird mit μ_3 die auf den Trommelumfang bezogene Masse der Trommel nebst Bremsscheibe, also mit $\mu_3 r^2$ ihr Trägheitsmoment bezeichnet, so ist (nach Gl. 2, S. 304)

6) $$\mu_3 r^2 \cdot \varepsilon = (S_4 - S_3)\,R - S_1\,(r - e) + S_2\,(r + e) + Df \cdot {}^1\!/_2\, d.$$

Bezeichnet man nun die Umfangs-Beschleunigung $r \cdot \varepsilon$ der Trommel, welche gleich den Beschleunigungen $p_1 = p_2$ der Fuhrwerke sein mufs, zunächst mit p_3, so wird die hierfür erforderliche Bandreibung

7) $$S_4 - S_3 = \frac{r}{R}\left\{\mu_3 p_3 + S_1 - S_2 - (S_1 + S_2)\frac{e}{r} - Df\frac{d}{2r}\right\}.$$

Mit den Arm-Verhältnissen des Bremshebels (grofser Arm a, kleiner Arm b, rechtwinklig zu S_4 gemessen), ergibt sich dann die erforderliche Belastung P am längeren Hebel zu

8) $$P = S_4 \frac{b}{a} = (S_4 - S_3) \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \frac{b}{a}.$$

Beispiel: Ein Bremsberg habe auf eine wagerechte Länge von 200 m eine Höhe von 100 m, dann ist

$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$; $\alpha = 26^0\,34'$; $\sin \alpha = 0{,}447$; $\cos \alpha = 0{,}894$; $\sec \alpha = 1{,}118$,

daher die schräg gemessene Länge $200 \cdot 1{,}118 = 224$ m. Der leere Wagen wiege 2000 kg, der beladene 6000 kg; Gleise und Fuhrwerk seien von solcher Beschaffenheit, dafs das Gleichgewichtsgefälle oder die Widerstandsziffer $\alpha_0 = 0{,}008$ gesetzt werden kann. Das Seil habe den Durchmesser $\delta = 2$ cm $= 0{,}02$ m und das Einheitsgewicht $q = 1{,}25$ kg/m, dann ist

$$e = 6{,}5 \cdot \delta^2 = 6{,}5 \cdot 0{,}0004 = 0{,}0026 \text{ m}.$$

Die Seiltrommel habe den Halbmesser $r = 0{,}75$ m; die Bremsscheibe den Halbmesser $R = 1{,}25$ m.

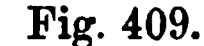
Die Wagen sollen sich regelmäfsig mit einer Geschwindigkeit von 1 m/sek bewegen; der Sicherheit halber werde vorausgesetzt, es sei die Geschwindigkeit durch einen Zufall auf $v = 2$ m/sek angewachsen und es müsse nun die Bewegung längs eines Weges von $s = 2$ m zum Aufhören gebracht werden. Dann gilt für die dazu erforderliche Zeit t (s. S. 13):

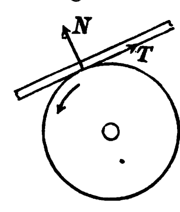
$$s = \frac{v}{2} t \quad \text{oder} \quad t = \frac{2s}{v};$$

somit beträgt die Verzögerung

$$p = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2s}; \quad \text{also} \quad t = 2 \text{ sek}; \quad p = 1 \text{ m/sek}^2.$$

Die Fallbeschleunigung werde durchweg zu $g = 10$ angenommen; die Schwungmasse der Räder eines Wagens betrage $\mu_1 = \mu_2 = 40$; es wird $\alpha_0 \cdot \cos \alpha = 0{,}008 \cdot 0{,}894 = 0{,}007$. Das Gewicht eines ganz abgewickelten Seiles beträgt $224 \cdot 1{,}25 = 280$ kg. Versteht man unter S_1 und S_2 die Spannkräfte der Seile an Stellen dicht neben der Trommel, so müssen diese den abgewickelten Teilen der Seile die gleiche Beschleunigung erteilen wie den Fuhrwerken; diese Seilgewichte können also den Wagengewichten beigezählt werden, u. zw. gilt dies auch bezüglich der Widerstände. Das Seil hängt nämlich nicht auf eine grofse Länge frei, weil die dazu erforderliche Höhe nicht vorhanden ist, es wird vielmehr, damit es nicht auf dem Boden schleife, durch Reibungsrollen unterstützt, welche es durch Reibung mitnimmt, ohne auf ihren Umfängen zu gleiten (Fig. 409).


Fig. 409.



Zum Mitnehmen ist eine Umfangskraft T erforderlich, für welche gilt (s. S. 250/51) $Nf \cdot \frac{1}{2} d_1 = T \cdot R_1$, wenn d_1 und $2 R_1$ Zapfen- und Rollendurchmesser bedeuten.

Mit $f=0{,}08$ und $2R_1=10\,d_1$ wird dann $T:N=0{,}008$, ebenso grofs wie α_0 für die Fuhrwerke. Die Wagen sind offenbar am schwersten zu bremsen, wenn der volle unten, der leere oben ist; dann mufs man also

$$M_1 g=6000+280;\quad M_2 g=2000^{\text{kg}},\quad \text{daher}$$
$$M_1=628;\quad M_2=200\quad \text{setzen.}$$

Hiermit wird Gl. 3

$$S_1=6280\,(0{,}447-0{,}007)+(628+40)\,1=2763+668=3431^{\text{kg}}$$

als stärkste Zugkraft im Seile. Gl. 4 gibt:

$$S_2=2000\,(0{,}447+0{,}007)-(200+40)\cdot 1=908-240=668^{\text{kg}}.$$

Die Trommel habe mit Einschlufs des darauf befindlichen Seiles und der Bremsscheibe ein Gewicht von 1600^{kg} und eine auf den Abstand $r=0{,}75^{\text{m}}$ bezogene Schwungmasse $\mu_3=150$. Der Zapfendruck D der Trommel wird wesentlich durch S_1+S_2 bedingt; die Vergröfserung, welche er noch durch das Gewicht der Trommel einschl. des aufgewickelten Seiles erfährt, kann wohl vernachlässigt werden, da dieser Vergröfserung noch eine Verminderung durch die Bremsbandkräfte S_4 und S_3 gegenüber steht und schliefslich der Einflufs der Zapfenreibung höchst unbedeutend ist. Daher werde $D=S_1+S_2=4099$ gesetzt; dann wird mit $f=0{,}08$ und $2r=10\,d$ aus Gl. 7:

$$S_4-S_3=\frac{0{,}75}{1{,}25}\left\{150\cdot 1+3431-668-4099\cdot\frac{0{,}0026}{0{,}75}-\frac{4099\cdot 0{,}08}{10}\right\}$$
$$=0{,}6\,(150+3431-668-14-33).$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs die beiden letzten Glieder (Seilbiegungs- und Zapfenreibungs-Widerstand an der Trommel) verschwindend klein sind. Es wird $S_4-S_3=0{,}6\cdot 2866=1720^{\text{kg}}$.

Ist $f=0{,}18$ die Reibungsziffer des Bremsbandes, $\alpha=0{,}7\cdot 2\pi$ der umspannte Bogen, so wird $e^{f\alpha}=2{,}21$; sind noch $a=3{,}00^{\text{m}}$ und $b=0{,}05^{\text{m}}$ die Arme des Bremshebels, so gibt Gl. 8:

$$P=1720\cdot\frac{2{,}21}{2{,}21-1}\,\frac{0{,}05}{3}=52{,}3^{\text{kg}}.$$

Für die gleichmäfsige Bewegung (mit $p_1=p_2=p_3=0$), u. zw. in dem Augenblicke, wo der volle Wagen oben ist, also $M_1 g=6000$; $M_2 g=2000+280$ beträgt, geben die Gleichungen 3, 4, 7 und 8:

$$S_1=6000\,(0{,}447-0{,}007)=2640^{\text{kg}};$$
$$S_2=2280\,(0{,}447+0{,}007)=1035^{\text{kg}};$$
$$S_4-S_3=0{,}6\left\{2640-1035-(2640+1035)\cdot\frac{0{,}0026}{0{,}75}-(2640+1035)\cdot\frac{0{,}08}{10}\right\}$$
$$=0{,}6\left\{2640-1035-13-29\right\}=938^{\text{kg}};$$
$$P_0=938\,\frac{2{,}21}{1{,}21}\,\frac{0{,}05}{3}=28{,}5^{\text{kg}}.$$

Im vorstehenden ist für die Bremse der ungünstigste Fall angenommen, dafs die Drehung der Trommel linksherum erfolgt, wobei von den Bremsbandkräften die gröfsere am Hebel angreift und von P hervorgerufen werden mufs, während die kleinere vom Gestell aufgenommen wird. Bei Rechtsdrehung aber greift die gröfsere am Gestelle, die kleinere am Hebel an (vergl. S. 262). Bei Rechtsdrehung wird also für das Anhalten

$$P' = \frac{1720}{e^{f\alpha} - 1} \frac{b}{a} = \frac{1720}{1{,}21} \cdot \frac{0{,}05}{3} = \frac{52{,}3}{2{,}21} = 24 \text{ kg},$$

für den Beginn der Bewegung

$$P_0' = \frac{938}{1{,}21} \frac{0{,}05}{3} = \frac{28{,}5}{2{,}21} = 13 \text{ kg}.$$

Es empfiehlt sich nun, ein Gewicht, welches das Mittel aus P_0 und P_0' ist, d. h. rund 21 kg, an dem Hebel dauernd zu befestigen. Soll dann die Trommel sich rechtsherum in Bewegung setzen, so hat der Wärter den Hebel mit 21 — 13 = 8 kg Kraftaufwand zu heben, während er bei der Linksdrehung den Hebel dauernd mit 28,5 — 21 = 7,5 kg abwärts zu drücken hat. Das Anhalten aus der Rechtsdrehung erfordert ein Niederdrücken mit 24 — 21 = 3 kg, dasjenige aus der Linksdrehung ein solches mit 52,3 — 21 = 31,3 kg, die der Wärter mit seinem Körpergewichte leicht auszuüben vermag.

Die Gleichungen 1 bis 7 lassen auch erkennen, was geschehen wird, wenn der Wärter des Bremsberges in dem Bestreben, die Wagen möglichst schnell anzuhalten, den Hebel einmal ungewöhnlich stark belastet. Dann entsteht eine gröfsere Verzögerung an der Trommelwelle, und es kann infolgedessen vorkommen, dafs das Seil des leeren Wagens spannungslos wird. Nach Gl. 2 wird $S_2 = 0$ für

$$p_2 = \frac{M_2 g (\sin\alpha + \alpha_0 \cos\alpha)}{M_2 + \mu_2} = \frac{2000\,(0{,}447 + 0{,}007)}{240} = 3{,}8 \text{ m/sek}^2.$$

Bei der gleichen Verzögerung $p_1 = 3{,}8$ würde nach Gl. 3

$$S_1 = 6280\,(0{,}447 - 0{,}007) + 628 \cdot 3{,}8 = 5153 \text{ kg};$$

sie verlangt nach Gl. 6 (mit $S_2 = 0$ und $D = S_1$) eine Bandreibung

$$S_4 - S_3 = \frac{0{,}75}{1{,}25} \left\{150 \cdot 3{,}8 + 5153\,(1 - 0{,}0035 - 0{,}008)\right\} = 3400 \text{ kg}$$

und bei Rechtsdrehung der Trommel eine Hebelbelastung

$$P = \frac{3400}{1{,}21 \cdot 60} = 47 \text{ kg}.$$

Bei dieser Belastung wird das Seil S_2 gerade spannungslos. Belastet man den Hebel aber noch stärker, so wird die Verzögerung noch gröfser, und Gl. 4 würde nun für S_2 einen negativen Wert liefern. Da eine negative Spannkraft in einem Seil aber nicht möglich ist, so wird die Kraft $S_2 = 0$ bleiben, das Seil aber nun schlaff werden. Infolgedessen verliert die geometrische Bedingung gleicher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von M_1 und M_2 ihre Gültigkeit; es erfährt nunmehr jeder Wagen seine besondere Bewegung.

Während das beladene Fuhrwerk in kurzer Zeit t_1 längs des Weges s_1 zur Ruhe kommt, läuft der leere Wagen, von dem Augenblicke des stärkeren Bremsens an gerechnet, mit der Verzögerung p_2 um eine längere Strecke s_2 aufwärts, wobei das Seil um den Unterschied $s_2 - s_1$ schlaff wird. Dann kehrt der leere Wagen unter Wirkung seines Gewichtes die Bewegung um, erreicht nach Zurücklegung des Weges $s_2 - s_1$ mit der Beschleunigung p_2 eine Geschwindigkeit v_2 und ein Arbeitsvermögen $(M_2 + \mu_2)\frac{v_2^2}{2}$, welches durch die Arbeit der inneren Kräfte des Seiles zu Null gemacht werden mufs.

Fügt der Wärter z. B. der festen Hebel-Belastung von 21 kg noch sein ganzes Körpergewicht von 75 kg hinzu, so dafs $P = 21 + 75 = 96$ kg ausmacht, so entsteht bei Rechtsdrehung der Trommel eine Bandreibung

$$S_4 - S_3 = \frac{96 \cdot 3}{0{,}05}\left(e^{f\alpha} - 1\right) = 96 \cdot 60 \cdot 1{,}21 = 6970 \text{ kg}.$$

Dann wird nach Gl. 6 mit $r\varepsilon = p_1$ und $S_2 = 0$:

$$150 p_1 \cdot r = 6970 R - S_1 (r - 0{,}0026 - 0{,}08 \cdot 0{,}1 \cdot r) \quad \text{oder}$$

$$150 p_1 = \frac{6970 \cdot 1{,}25}{0{,}75} - S_1\, 0{,}9885.$$

Gl. 1 aber liefert für die Verzögerung p_1 des vollen Wagens:

$$628 p_1 = S_1 - 6280\,(0{,}447 - 0{,}007).$$

Aus beiden Gleichungen folgt nach Entfernung von S_1: $p_1 = 11{,}4 \text{ m/sek}^2$. Mit dieser Verzögerung wird die Geschwindigkeit von 2 m/sek in der Zeit $t_1 = \frac{2}{11{,}4} = 0{,}18$ sek längs eines Weges $s_1 - \frac{2}{2} t_1 = 0{,}18$ m aufgezehrt.

Die Verzögerung p_2 des leeren Wagens folgt aus Gl. 2 mit $S_2 = 0$; es ist

$$240 p_2 = 2000\,(0{,}447 + 0{,}007),$$

also $p_2 = 3{,}78 \text{ m/sek}^2$. Mit ihr wird die Geschwindigkeit von 2 m/sek in der Zeit $t_2 = \frac{2}{3{,}78} = 0{,}53$ sek längs eines Weges $s_2 = \frac{2 \cdot 0{,}53}{2} = 0{,}53$ m aufgezehrt. Das Seil des leeren Wagens wird also um $s_2 - s_1 = 0{,}53 - 0{,}18 = 0{,}35$ m schlaff. Beim Abwärtsrollen hat das leere Fuhrwerk eine Beschleunigung

$$p_2' = \frac{M_2 g\,(\sin\alpha - \alpha_0 \cos\alpha)}{M_2 + \mu_2} = \frac{2000 \cdot 0{,}44}{240} = 3{,}67 \text{ m/sek}^2$$

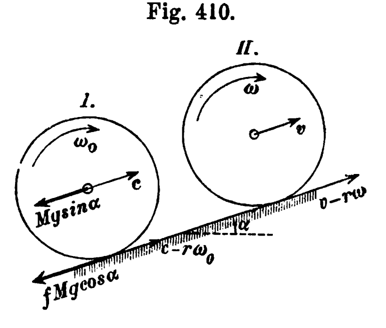
und erreicht mit dieser längs des Weges $s_2 - s_1 = 0{,}35$ m bis zum Spannen des Seiles eine Geschwindigkeit $v_2 = \sqrt{2 p_2' (s_2 - s_1)} = 1{,}6$ m/sek und ein Arbeitsvermögen $240 \cdot p_2' (s_2 - s_1) = 308{,}3$ mkg, welches von dem Seil aufgenommen werden mufs.

e) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene.

Beim Rollen, wo die Geschwindigkeit des Körpers gegen die Ebene an der Berührungsstelle Null ist, tritt der Reibungswiderstand nur

in derjenigen Gröfse auf, die erforderlich, um das Gleiten zu verhindern. Ist daher (Gl. 7, S. 328) $\operatorname{tg} \alpha < f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)$, so ist $T < fN$; sind aber die anfänglichen Einzelbewegungen so beschaffen, dafs an der Berührungsstelle ein Gleiten stattfindet, so tritt die Reibung in der Gröfse $fMg \cos \alpha$ auf; doch wird nach einer gewissen Zeit die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergehen, wenn die Bedingung für eine solche (Gl. 7, S. 328) erfüllt ist, und in diesem Augenblicke vermindert sich dann die Reibung plötzlich. Der Umdrehungskörper habe zu Anfang (Stellung I in Fig. 410) eine Drehung mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega_0$, eine Geschwindigkeit des Schwerpunktes c und werde mit diesen Geschwindigkeiten auf die schiefe Ebene gesetzt, so dafs an der Berührungsstelle die Gesamtgeschwindigkeit $c - r\omega_0$ entsteht. Es sei $c > r\omega_0$, dann wirkt in Fig. 410 der Reibungswiderstand $fMg \cos \alpha$ abwärts, die Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ebenfalls abwärts. Der Schwerpunkt erfährt dadurch eine abwärts gerichtete Beschleunigung

Fig. 410.



$$1) \qquad p = g\,(f \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Die Drehung erfährt nach S. 305 und unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Umfangsbeschleunigung

$$2) \qquad r\varepsilon = f\frac{M}{\mu}\, g \cos \alpha.$$

In t Sekunden entstehen die Geschwindigkeits-Änderungen

$$c - v = pt \quad \text{und} \quad r\,(\omega - \omega_0) = r\varepsilon t$$

mit dem Verhältnisse

$$3) \qquad \frac{c - v}{r\omega - r\omega_0} = \frac{p}{r\varepsilon}.$$

Soll nun v diejenige Geschwindigkeit des Schwerpunktes sein, bei der die Rollbewegung beginnt (Stellung II, Fig. 410), so mufs $r\omega = v$ eingesetzt werden. Hiermit liefert die letzte Gleichung,

nach v aufgelöst: $v = \dfrac{c r \varepsilon + p r \omega_0}{p + r \varepsilon}$; die Zeit t_1, nach welcher das Rollen beginnt, ist dann $t_1 = \dfrac{c - v}{p}$, oder nach Einsetzen von v

$$t_1 = \frac{c - r\omega_0}{p + r\varepsilon}. \tag{4}$$

Nach dieser Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit an der Berührungsstelle Null, und die Reibung wechselt ihren Sinn. Ist nun die Bedingung Gl. 7, S. 328 erfüllt, so wird eine Rollbewegung eintreten. Andernfalls wird die Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten v und $r\omega$ nur einen Augenblick währen, aber sogleich wieder aufhören, weil die Reibung nicht hinreicht, sie zu erhalten. — Für $r\omega_0 > c$ wechselt die Reibung in Fig. 410 ihren Sinn, es wird

$$p = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha), \quad r\varepsilon = -f\frac{M}{\mu}g\cos\alpha \quad \text{und}$$

$$t_1 = \frac{r\omega_0 - c}{r\varepsilon - p}, \text{ wie man leicht findet.}$$

Beispiel 1: Eine Kugel von $0{,}1^{\mathrm{m}}$ Halbmesser werde nach Fig. 410 mit 8^{m} sekundlicher Geschwindigkeit des Schwerpunktes und 2^{m} Umfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung auf eine mit $\alpha = {}^1/_{10}$ ansteigende Bahn geworfen. Die anfängliche Gleitgeschwindigkeit ist daher $6\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$. Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}2$.

In diesem Fall ist $\cos\alpha$ annähernd $= 1$ zu setzen, $\sin\alpha \doteq 0{,}1$, $M = 2{,}5\,\mu$ (S. 310), mithin $p = g\,(0{,}2 + 0{,}1) = 0{,}3\,g$; $r\varepsilon = g \cdot 2{,}5 \;\, 0{,}2 = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, ist $v = 5{,}75\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$; die entsprechende Zeit

$$t_1 = \frac{8 - 2}{0{,}8\,g} = 0{,}76^{\mathrm{sek}}.$$

In diesem Augenblicke vermindert sich die Reibung nach Gl. 6, S. 328 auf

$$T = \frac{Mg \cdot 0{,}1}{3{,}5} = {}^1/_{35}\,Mg,$$

während sie vorher ${}^1/_5\,Mg$ betrug. Die Verzögerung der Rollbewegung wird nun (Gl. 5, S. 328) $p = {}^5/_7\,g\sin\alpha = 0{,}0714\,g = 0{,}7$. Die Geschwindigkeit wird Null nach weiterem Verlaufe von $5{,}75 : 0{,}7 = 8{,}2^{\mathrm{sek}}$, während dessen (nach Gl. 4, S. 12) $5{,}75 \cdot 4{,}1 = 23{,}6^{\mathrm{m}}$ zurückgelegt werden. Von dieser Stelle an rollt die Kugel mit der Beschleunigung $p = 0{,}7\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}^2}$ rückwärts, soweit die Bahn reicht. — Die Geschwindigkeitsgesetze sind in Fig. 411 dargestellt. Die obere Linie bezieht sich auf den Schwerpunkt, die untere auf die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung; beide treffen sich beim Beginne des Rollens.

Fig. 411.

1 a. Hat die Bahn keine nennenswerte Neigung, ist also $\alpha = 0$, so wird während des Gleitens die Verzögerung des Schwerpunktes $p = 0{,}2\,g$; die Umfangsbeschleunigung der Drehung $r\varepsilon = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, wird dann $v = 6{,}3\ ^{m}/_{sek}$, die entsprechende Zeit $t_1 = 0{,}874\ ^{sek}$. Mit der Geschwindigkeit v setzt die Kugel die Rollbewegung gleichmäfsig fort, wenn kein Rollwiderstand sie verzögert.

Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Während des Gleitens wird nach S. 274 und 339

$$r\varepsilon = \left(f - \frac{e}{r}\right)\frac{M}{\mu}\,g\cos\alpha \tag{5}$$

zu setzen sein, während des Rollens

$$p = g\,\frac{\sin\alpha - {}^{e}/_{r}\cos\alpha}{1 + \frac{\mu}{M}}. \tag{6}$$

Letzteres gibt für $\alpha = 0$, $e = 0{,}5\ ^{mm}$, $r = 100\ ^{mm}$ eine Verzögerung $= \frac{g}{280} = 0{,}035\ ^{m}/_{sek^2}$.

1 b. Ein Umdrehungskörper, z. B. eine Kugel, kann auch auf wagerechter Bahn so fortgeworfen, fortgeschnellt, werden, dafs sie nach einer gewissen Zeit zurückrollt (Billardkugel). Gibt man ihr eine grofse Drehungsgeschwindigkeit ω_0 links herum und wirft sie mit nicht zu grofser Geschwindigkeit c nach rechts fort (Fig. 412), so erfährt sie unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Verzögerung des Schwerpunktes $p = fg$, eine Umfangsverzögerung $r\varepsilon = fgM:\mu$; also $\mu r\varepsilon = Mp$. Ist v die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, so mufs diese negativ, d. h. nach links gerichtet sein, denn während des Rollens auf wagerechter Bahn kann eine Änderung des Sinnes der Geschwindigkeit nicht mehr vorkommen. Ist t_1 die Zeit, nach der das Zurückrollen beginnt, so wird

Fig 412.

$$c + v = p\,t_1,\quad r\,\omega_0 - v = r\varepsilon\,t_1,$$

$$\text{mithin}\quad v = \frac{p\,r\,\omega_0 - c\,r\varepsilon}{p + r\varepsilon}\quad\text{und}\quad t_1 = \frac{c + r\,\omega_0}{p + r\varepsilon}.$$

Soll nun die Kugel rückläufig, also $v > 0$ sein, so mufs $p\,r\,\omega_0 > c\,r\varepsilon$ oder $\mu r\omega_0 > Mc$, also bei einer Kugel mit $\mu = 0{,}4\,M$ mufs $r\omega_0 > {}^{5}/_{2}\,c$ sein. Es läfst sich sogar erreichen, dafs $v > c$ wird, d. h. dafs die Kugel schneller zurückrollt, als sie fortgeworfen wurde. Dazu ist erforderlich

$$r\omega_0 > c\left(1 + 2\,\frac{r\varepsilon}{p}\right),\quad\text{bei einer Kugel } r\omega_0 > 6\,c.$$

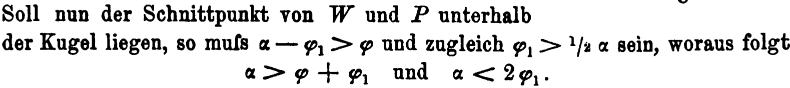
1 c. Sollen der ursprünglich ruhenden Kugel durch eine grofse, nur sehr kurze Zeit t_0 wirkende Kraft P solche Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c erteilt werden, dafs ein Zurückrollen eintritt, dafs also $\mu r \omega_0 > Mc$ wird, so sind dazu Beschleunigungen $r\varepsilon_0$ und p_0 erforderlich, die in der Zeit t_0 die Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c hervorbringen; es mufs also auch $\mu r \varepsilon_0 > Mp_0$ sein.

Fig. 413.

Auf die Kugel wirke die Schwere Mg, der um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichende Gesamtwiderstand W der Bahn und die gesuchte Kraft P. Die Mittelkraft R dieser drei mufs wagerecht gerichtet sein, da die Beschleunigung p_0 des Schwerpunktes wagerecht sein soll (Fig. 413), u. zw. mufs die Lage von R sich unterhalb des Schwerpunktes befinden (etwa um l), dann wird $\mu r \varepsilon_0 = Rl : r$ und $Mp_0 = R$, wobei $l > r$ sein mufs, damit $\mu r \varepsilon_0 > Mp_0$ werde. Gegenüber der grofsen Kraft P möge das Gewicht der Kugel vernachlässigt werden.

Fig. 414.

Der Punkt B (Fig. 414), an welchem der Druck P auf die Kugel ausgeübt werden soll, möge durch den Mittelpunktswinkel α bestimmt sein. Übt man die Kraft P aus, indem man mit einem lederbeschlagenen Stabe bei B in der Richtung BC gegen die Kugel stöfst, oder indem man mit der Hand an der Kugel (bei B sie berührend) abwärts schlägt, so wird der Stab bezw. die Hand an der Kugel gleiten und die Richtung des Druckes P von der Normalen DB um den Reibungswinkel φ_1, der für Kugel und stofsenden Körper gilt, abweichen. Soll nun der Schnittpunkt von W und P unterhalb

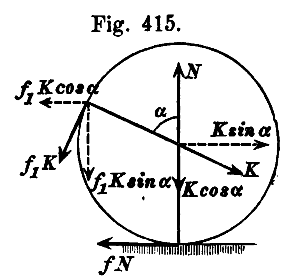


der Kugel liegen, so mufs $\alpha - \varphi_1 > \varphi$ und zugleich $\varphi_1 > {}^1/_2\,\alpha$ sein, woraus folgt

$$\alpha > \varphi + \varphi_1 \quad \text{und} \quad \alpha < 2\varphi_1 .$$

Der Winkel α mufs also zwischen den Grenzen $\varphi + \varphi_1$ und $2\varphi_1$ liegen, und es mufs $\varphi_1 > \varphi$ sein, d. h. der Körper, mit dem der Druck P ausgeübt wird, mufs rauher sein als die Unterlage der Kugel. Ist z. B. $f = 0{,}2$ ($\varphi = 11^0$), $f_1 = 0{,}8$ ($\varphi_1 = 39^0$), so mufs α zwischen 50 und 78° liegen; es würde daher $\alpha = 60^0$ der Bedingung entsprechen.

Fig. 415.



Zerlegt man nun den Druck P in einen Normaldruck K und die Reibung $f_1 K$, den Widerstand W in N und fN, zerlegt ferner K und $f_1 K$ nach wagerechter und lotrechter Richtung, so wird (Fig. 415), da in lotrechtem Sinne keine Verschiebung erfolgt, $N = K(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha)$. Dann ergibt sich als Beschleunigung des Schwerpunktes nach rechts

$$p_0 = \frac{K \sin\alpha - f_1 K \cos\alpha - fN}{M}$$

$$\text{oder} \quad p_0 = \frac{K}{M}(\sin\alpha - f_1 \cos\alpha - f\cos\alpha - ff_1 \sin\alpha)$$

und die Umfangsbeschleunigung der Drehung

$$r\varepsilon_0 = \frac{f_1 K - fN}{\mu} = \frac{K}{\mu}(f_1 - f\cos\alpha - ff_1\sin\alpha).$$

Für das Zurückrollen besteht nun die Bedingung $\mu r \varepsilon_0 > p_0 M$; weil aber p_0 und $r\varepsilon_0$ beide mit K verhältnisgleich sind, so kommt es auf die Gröfse von K nicht an, sondern nur auf die Winkel α, φ und φ_1. Eine Veränderlichkeit der Gröfse von K, wie sie beim Stofse besteht, bringt keine wesentliche Änderung.

Es sei $\alpha = 60^0$, $f = 0{,}2$, $f_1 = 0{,}8$ und beispielsweise $K = 20\,Mg$, dann wird

$$p_0 = 20\,g\,(0{,}866 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 44{,}5;$$
$$r\varepsilon_0 = 50\,g\,(0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 275.$$

Wie es sein mufste, ist $r\varepsilon_0 > 2{,}5\,p_0$.

Wirkt die Kraft $K = 20\,Mg$ nebst der entsprechenden Reibung $f_1 K$ nur $^1/_{20}$ Sekunde, so braucht man die Verschiebung ihres Angriffspunktes nicht zu berücksichtigen. Es wird dann $c = 44{,}5 \cdot {}^1/_{20} = 2{,}23$. $r\omega_0 = 13{,}75$. Mit diesen Geschwindigkeiten wird sich die Kugel nach dem Aufhören der Kräfte K und $f_1 K$ bewegen und wird, da nun $p = 0{,}2\,g$ und $r\varepsilon = 0{,}5\,g$, zurückrollen mit der Geschwindigkeit

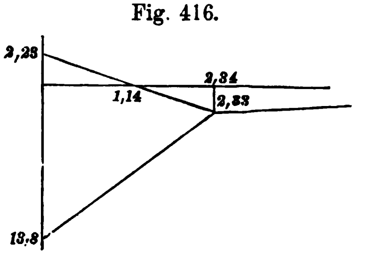
$$v = \frac{0{,}2 \cdot 13{,}75 - 2{,}23 \cdot 0{,}5}{0{,}2 + 0{,}5} = 2{,}33;$$

das Gleiten währt im ganzen

$$t_1 = \frac{c + r\omega_0}{p + r\varepsilon} = 2{,}34^{\text{ sek}}.$$

Die Umkehr der Kugel erfolgt übrigens schon während des Gleitens. Nach der Zeit $t = c : (fg) = 2{,}23 : 1{,}962 = 1{,}14^{\text{ sek}}$ und, nachdem die Kugel sich um $s' = 2{,}23 \cdot 1{,}14 \cdot 0{,}5 = 1{,}27^{\text{ m}}$ nach rechts bewegt hat, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach rechts Null geworden, kehrt dann während des Restes der Gleitzeit, d. h. während der Zeit $t'' = 2{,}34 - 1{,}14 = 1{,}20^{\text{ sek}}$ um $s'' = 2{,}33 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}5 = 1{,}4^{\text{ m}}$ gleitend nach links zurück. An dem um $0{,}13^{\text{ m}}$ links von der Ausgangsstelle gelegenen Punkte beginnt erst das Rollen, welches sich dann mit der Geschwindigkeit $2{,}33\ ^{\text{m}}/_{\text{sek}}$ fortsetzt. Fig. 416 zeigt die Geschwindigkeitsgesetze der Bewegungen.

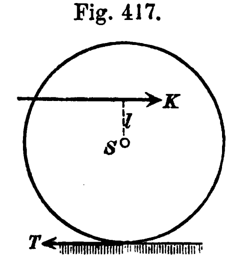
Fig. 416.



Beispiel 2: Wirkt auf eine auf wagerechter Ebene anfänglich ruhende Kugel eine wagerechte Kraft K, die um l oberhalb des Schwerpunktes liegt,

nach rechts und soll eine **Rollbewegung** entstehen, so ist am Auflagerpunkt ein Widerstand T erforderlich, den wir nach links gerichtet annehmen wollen (Fig. 417). Die Beschleunigung des Schwerpunktes p (S. 166) und die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (S. 304) werden dann

Fig. 417.



$$p = \frac{K - T}{M}; \quad \varepsilon = \frac{Kl + Tr}{\mu r^2}.$$

Für Rollbewegung mufs nun $r\varepsilon = p$ sein, oder

$$K\mu r - T\mu r = KMl + TMr.$$

Hieraus bestimmt sich

$$T = K\frac{\mu r - Ml}{(M + \mu)\, r}.$$

Für $l = 0$ wird $T = K : \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) = {}^2/_7\, K$. Für $l = r$ wird T negativ, nämlich $T = -K\frac{M - \mu}{M + \mu} = -{}^3/_7\, K$. Soll aber die Kraft K ohne jede Mitwirkung von T, d. h. auf völlig glatter Ebene eine Rollbewegung erzeugen, soll $T = 0$ sein, so mufs $l : r = \mu : M = 0{,}4$ sein, d. h. $l = {}^2/_5\, r$. In dieser Höhe darf eine Kugel beliebig heftig gestofsen werden, ohne dafs sie unten gleitet; sie wird sofort eine Rollbewegung beginnen.

f) Beschleunigte Schraubenbewegung.

Die Schraubenbewegung besteht aus einer Drehung um die Achse der Schraube und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse. Sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ω und u, so ist das **Arbeitsvermögen** der Schraube $^1/_2 J\omega^2 + {}^1/_2 Mu^2$ (S. 324). Weil aber bei der Schraube vom mittleren Halbmesser r und dem Steigungswinkel α der mittleren Schraubenlinie die Ganghöhe $h = 2r\pi \operatorname{tg}\alpha$, so ist auch $r\omega \operatorname{tg}\alpha = u$, also mit $J = \mu r^2$

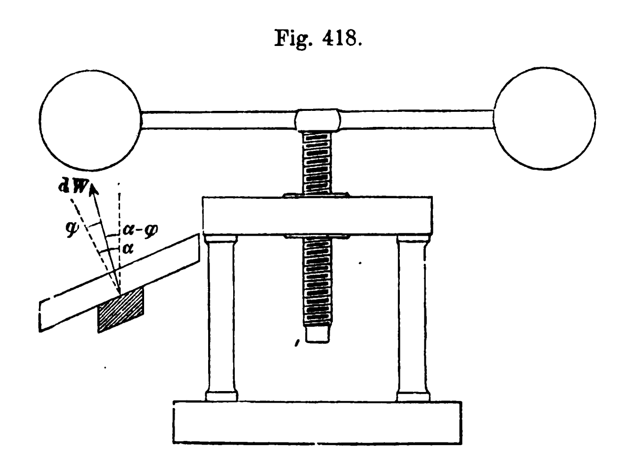
$$1) \qquad {}^1/_2\,(J\omega^2 + Mu^2) = {}^1/_2\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2\alpha} + M\right)u^2.$$

Hiernach würde man für eine ideelle Schraube leicht den Satz der Arbeit anwenden können. Der bei wirklichen Schrauben sehr bedeutende Einflufs der Reibung kann aber (nach A. Ritter, Techn. Mechanik) am leichtesten berücksichtigt werden, wenn man die Beschleunigungen der Einzelbewegungen berechnet.

Die Schraube sei flachgängig und oben mit Schwungkugel-Armen versehen (Fig. 418). Solche Schrauben kommen in Prägewerken und in Hüttenwerken (zum Zerbrechen von Eisenstäben) vor.

Die Schrauben werden durch Arbeiter in die Höhe gedreht und sind nicht selbsthemmend, vielmehr gewinnen sie durch ihr Gewicht (z. T. unter Nachhülfe der Arbeiter) ein gewisses Arbeitsvermögen, welches dann zum Zerbrechen verbraucht wird. Die treibende Kraft sei allein die Schwere Mg. Ein Teilchen der Schraubenmutter leistet beim Abwärtsgleiten einen Widerstand dW, der um $\alpha - \varphi$ von der Achsenrichtung abweicht.

Fig. 418.



Der Schwerpunkt der Schraube kann sich nur geradlinig bewegen; die Beschleunigung p des Schwerpunktes folgt aus der Gleichung

$$Mp = Mg - \cos(\alpha - \varphi) \int dW. \tag{2}$$

Die wagerechten Seitenkräfte $\sin(\alpha - \varphi)\, dW$ bilden das treibende Kräftepaar für die Drehung; es wird (S. 305, Gl. 4)

$$\mu r \varepsilon = \sin(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Weil aber $r\omega \operatorname{tg} \alpha = u$, so mufs auch $r\varepsilon \operatorname{tg} \alpha = p$ sein, mithin

$$\mu p = \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha - \varphi) \int dW. \tag{3}$$

Entfernt man aus Gl. 2 und 3 die Gröfse $\int dW$, so wird

$$p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}}. \tag{4}$$

Ist die Schraube in aufwärts drehende Bewegung versetzt und wird sie dann der Wirkung der Schwere überlassen, so kehrt die

Reibung ihren Sinn um, es ist $-\varphi$ mit $+\varphi$ zu vertauschen, und die Verzögerung der aufwärts gerichteten Bewegung wird

$$5)\qquad p = \frac{g}{1 = \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}}.$$

Bei einer Spindel mit Schwungkugeln wird nun das Trägheitsmoment wesentlich von diesen geliefert, und es ist, wenn die Schwungkugeln zusammen die Masse M_1 haben und im Abstand R von der Mitte sich befinden, annähernd $J = M_1 R^2$; dann wird $\mu r^2 = M_1 R^2$ und, weil $R:r$ meist grofs, auch μ sehr grofs gegen M. Aufserdem sind, wenn auch $\alpha > \varphi$ ist, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$ und $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ immer ziemlich kleine Brüche, sodafs $\frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$ gegen die Einheit so grofs wird, dafs diese dagegen verschwindet. Daher kann man mit grofser Annäherung statt der Gl. 4 und 5 die einfachere Doppelformel

$$6)\qquad p = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) \quad \text{schreiben.}$$

Beginnt die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null, so ist nachdem die Schraube um h gesunken,

$$7)\qquad u^2 = 2ph.$$

Das Arbeitsvermögen wird dann $\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2\alpha} + M\right) 2ph$.

Beispiel: Das Gesamtgewicht der Schraube betrage 300 kg, wovon auf die Schwungkugeln 200 kg kommen mögen. Aufserdem sei $\operatorname{tg}\varphi = f = 0{,}1$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$; $R = 20r$. Dann ist $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0{,}098$, $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0{,}306$. Ferner ist mit genügender Genauigkeit $\mu r^2 = {}^2/_3 MR^2$, daher $\mu = {}^2/_3 \cdot 400\, M = {}^{800}/_3\, M$, so dafs dagegen M in Gl. 1 zu vernachlässigen ist. Dann kann auch das Arbeitsvermögen einfacher geschrieben werden $\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2\alpha} \frac{u^2}{2} = \frac{20\,000\, M}{3} \frac{u^2}{2}$. Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung wird nach Gl. 6

$$p = g \frac{3}{800}\, 0{,}2 \cdot 0{,}098 = 0{,}000\,074\, g = 0{,}000\,72\ \mathrm{m/sek^2}.$$

Nennt man p_0 die Beschleunigung einer reibungslosen Schraube von den gleichen Verhältnissen, so ist nach Gl. 6 (für $\varphi = 0$)

$$p_0 = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{daher } p = p_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Da nun nach Gl. 7 u^2 mit p verhältnisgleich, so ist auch, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$ das Arbeitsvermögen der wirklichen bezw. der reibungslosen Schraube, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$. Will man daher das Arbeitsvermögen der sinkenden Schraube verwerten, so ist $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ der Wirkungsgrad der sinkenden Schraube. Es mufs zugleich $\mathfrak{A}_0 = Mgh$ sein, da bei der reibungslos sinkenden Schraube nur die Schwerkraft Arbeit verrichtet. Um aber von der Höhe h sinken zu können, mufste die Schraube um diese Gröfse gehoben werden, und weil der Wirkungsgrad der Schraube beim Heben nach S. 287 $\eta_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$, so war zum Heben die Arbeit $\mathfrak{A}_1 = Mgh \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ erforderlich. Betrachtet man nun Auf- und Abwärtsbewegung im Zusammenhange, so ist der Gesamt-Wirkungsgrad

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = 0{,}32\,.$$

Annähernd kann man auch bei der Kleinheit der Winkel α und φ

$$\operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) = \operatorname{tg}\alpha \mp f \text{ schreiben, dann wird}$$

$$\eta_2 = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}2 + 0{,}1} = \frac{1}{3} = 0{,}33\,.$$

Derartige Vernachlässigungen sind zulässig, weil ja φ und f doch in jedem Falle nur unsicher bekannt sind. Um die Schraube von 300 kg Gewicht um $h = 0{,}1$ m zu heben, waren $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha} =$ annähernd 45 mkg Arbeit aufzuwenden. Nach dem Hinabsinken um 0,1 m beträgt das Arbeitsvermögen noch $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha} =$ annähernd 15 mkg.

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)



